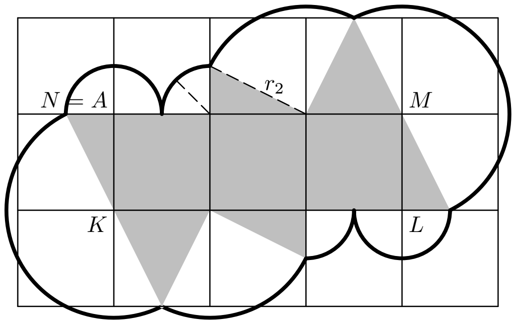
Řešení. a)



b) Při každém otočení se bod T pohybuje po čtvrtkružnici o jednom ze dvou poloměrů. Menší poloměr je $r_1 = \frac{1}{2}a$, větší poloměr r_2 určíme z Pythagorovy věty a dostaneme, že

$$r_2 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

Plocha ohraničená křivkou se skládá ze tří čtverců (o celkové ploše $3a^2$), šesti trojúhelníků (o celkové ploše $2a^2$), tří půlkružnic o poloměru r_1 a tří půlkružnic o poloměru r_2. Odtud dostáváme, že hledaný obsah plochy je

$$3a^2 + 2a^2 + \frac{3}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)^2 = 5a^2 + \frac{9}{4}\pi a^2.$$

[za správně nakreslený obrázek — 2 body, za správné určení poloměrů — 2 body, za správné určení celkové plochy — 2 body]

57. ročník Matematické olympiády

III. kolo kategorie Z9

Z9–III–1

Ve Lhotě volili starostu. Kandidovali dva občané: Ing. Schopný a jeho manželka Dr. Schopná. V obci byly tři volební místnosti. V první i druhé místnosti dostala více hlasů Dr. Schopná. V první byl poměr hlasů 7 : 5, ve druhé 5 : 3. Ve třetí volební místnosti byl poměr hlasů 3 : 7 ve prospěch Ing. Schopného. Volby nakonec skončily nerozhodně, oba kandidáti totiž získali stejný počet hlasů. V jakém poměru byly počty odevzdaných platných hlasovacích lístků v jednotlivých volebních místnostech, víme-li, že v první a druhé místnosti odevzdal platný hlas stejný počet lidí?

Řešení. Počet platných hlasů odevzdaných v první volební místnosti označme x, ve druhé volební místnosti jich bylo odevzdáno také x, počet platných hlasů odevzdaných ve třetí volební místnosti označme y. Ing. Schopná získala v první volební místnosti $\frac{7}{12}x$ hlasů, ve druhé $\frac{5}{8}x$ hlasů, ve třetí $\frac{3}{10}y$ hlasů. Dohromady bylo odevzdáno $x + x + y$ platných hlasů, z nichž polovina byla pro Ing. Schopnou. Docházíme k rovnici

$$\frac{7}{12}x + \frac{5}{8}x + \frac{3}{10}y = \frac{1}{2}(x + x + y),$$
$$70x + 75x + 36y = 60(x + x + y).$$

Po úpravě dostaneme

$$25x = 24y,$$
$$\frac{x}{y} = \frac{24}{25}.$$

Počty odevzdaných platných hlasovacích lístků v jednotlivých místnostech byly v poměru $x : x : y$, tedy $24 : 24 : 25$.

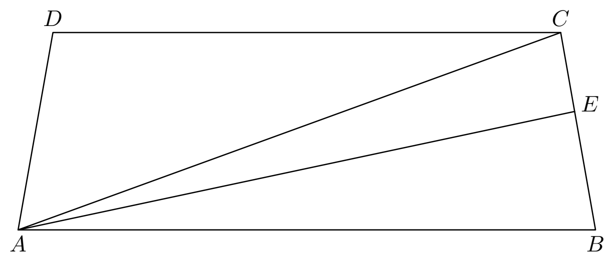
[3 b. za sestavení rovnice, 2 b. za vyřešení rovnice, 1 b. za správnou odpověď]

Z9–III–2

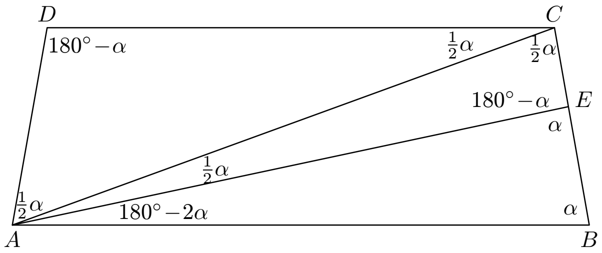
Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), kde $|AB| > |CD|$. Bodem A se dají vést dvě přímky tak, aby rozdělily lichoběžník na tři rovnoramenné trojúhelníky. Určete velikosti úhlů lichoběžníku $ABCD$.

Řešení. Je zřejmé, že jedna z dělících přímek musí procházet bodem C, druhá dělící přímka protne v bodě E buď základnu CD, nebo rameno BC.

a) Předpokládejme, že druhá dělící přímka protne rameno BC:



Trojúhelník ADC s tupým úhlem u vrcholu D může být rovnoramenný jedině tak, že $|AD| = |CD|$. V trojúhelníku AEB je úhel u vrcholu A menší než úhel u vrcholu B, takže platí $|AE| > |EB|$. Zároveň platí $|AB| > |EB|$, neboť $|EB| < |BC| = |AD| = |CD| < < |AB|$. Má-li být ABE rovnoramenný, musí proto platit $|AB| = |AE|$, takže úhel AEB je ostrý, a tudíž trojúhelník AEC má tupý úhel u vrcholu E. Takový trojúhelník může být rovnoramenný jedině tak, že $|AE| = |EC|$. Označme α úhel ABC (je pak $|\sphericalangle DCB| = = |\sphericalangle CDA| = 180° - \alpha$, protože lichoběžník $ABCD$ je rovnoramenný) a vyjádřeme vnitřní úhly všech tří posuzovaných rovnoramenných trojúhelníků:

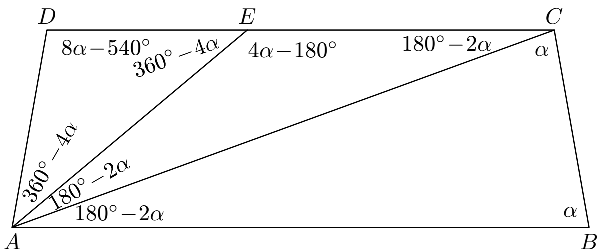


Z obrázku je patrné, že úhel DCB je roven též $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha = \alpha$. Z rovnosti $|\sphericalangle DCB| = = 180° - \alpha = \alpha$ tak plyne $\alpha = 90°$, což nevyhovuje (úhel α zkoumaného lichoběžníku musí být ostrý).

Druhá dělící přímka tedy nemůže protínat rameno BC.

b) Předpokládejme, že druhá dělící přímka protne základnu CD.

Vzhledem k podmínce $|AB| > |CD|$ je zřejmé, že úhel ADE je tupý. Odtud plyne, že $|AD| = |DE|$. Analogicky i úhel AEC musí být tupý. Odtud plyne, že $|AE| = |EC|$. V trojúhelníku ABC je úhel u vrcholu A menší než úhel u vrcholu B, takže platí $|AC| > > |BC|$. Zároveň platí $|BC| < |AB|$, neboť $|BC| = |AD| = |DE| < |DC| < |AB|$. Má-li být ABC rovnoramenný, musí proto platit $|AB| = |AC|$. Opět označíme α úhel ABC a postupně vyjádříme vnitřní úhly posuzovaných rovnoramenných trojúhelníků:



Vzhledem k tomu, že lichoběžník je rovnoramenný, platí, že $|\sphericalangle DAB| = \alpha$, tj.

$$(360° - 4\alpha) + (180° - 2\alpha) + (180° - 2\alpha) = \alpha.$$

Odtud dostaneme, že

$$\alpha = 80°.$$

Vnitřní úhly lichoběžníku tedy jsou 80°, 80°, 100°, 100°.

[za vyloučení možnosti, že druhá dělící přímka protíná rameno BC — 2 body, za sestavení rovnice 2 body, za správné řešení rovnice 2 body]

Z9–III–3

Najděte všechna kladná celá čísla x, y, pro která platí:

$$1 + x + y + xy = 2\,008.$$

Řešení. Rovnici upravíme na tvar

$$(1 + x)(1 + y) = 2\,008$$

a hledáme rozklad čísla 2 008 na součin dvou činitelů větších než 1. Ze symetrie úlohy je zřejmé, že stačí vyšetřovat jen případy, kdy $x \leqq y$. Protože $2\,008 = 2^3 \cdot 251$ a 251 je prvočíslo, snadno sestavíme tabulku všech možných rozkladů:

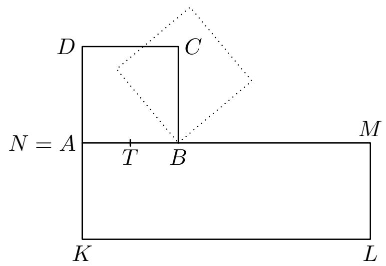
$1+x$	2	4	8
$1+y$	1 004	502	251
x	1	3	7
y	1 003	501	250

Rovnice má šest řešení: (1,1 003), (1 003,1), (3,501), (501,3), (7,250), (250,7).

[za rozklad levé strany rovnice — 3 body, za nalezení rozkladu čísla 2 008 — 1 bod, za všechna řešení — 2 body]

Z9–III–4

Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky a a obdélník $KLMN$ o stranách délek $|KL| = 3a$ a $|LM| = a$. Na počátku je čtverec $ABCD$ umístěn tak, že $A = N$ a strana AB leží na straně NM. Čtverec $ABCD$ se otáčením kolem svých vrcholů pohybuje jedním směrem po obvodu obdélníku $KLMN$ (obr. 1) tak dlouho, než se opět dostane do původní polohy.



Obr. 1

a) Narýsujte dráhu, po níž se bude pohybovat bod T, který je středem strany AB.

b) Určete obsah plochy ohraničené křivkou, kterou opisuje bod T.