58. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Učitelka Kadrnožková kupovala v pokladně zoologické zahrady vstupenky pro své žáky a pro sebe. Vstupenka pro dospělého byla dražší než pro školáka, avšak ne více než dvakrát. Učitelka Kadrnožková zaplatila celkem 994 Kč. Učitel Hnízdo měl s sebou o tři žáky více než jeho kolegyně, a tak za své žáky a za sebe zaplatil 1 120 Kč.

1. Kolik žáků měl s sebou učitel Hnízdo?
2. Kolik stála vstupenka pro dospělého?

Možné řešení. Ze zadání bezprostředně vyplývá, že vstupné pro tři žáky stálo $1120 - 994 = 126$ (Kč), tedy pro jednoho žáka $126 : 3 = 42$ (Kč). Za 1 120 Kč by učitel Hnízdo nakoupil vstupenky pro nejvýše 26 žáků (a 28 Kč by mu pak zbylo), protože $1\,120 : 42 = 26$ (zbytek 28). Když zbytek přidáme k ceně žákovské vstupenky, získáme cenu vstupenky pro dospělého (tato vstupenka má být dražší než žákovská, avšak ne více než dvakrát). Učitelova vstupenka tedy stála $42 + 28 = 70$ (Kč) a žáků bylo $26 - 1 = 25$.

(Pro kontrolu: $25 \cdot 42 + 70 = 1\,120$ a $22 \cdot 42 + 70 = 994$, takže vše je v naprostém pořádku.)

Z5–I–2

František Nudílek se zabýval tím, že psal po sobě jdoucí přirozená čísla. Začal takto: 1234567891011... Po čase ho to přestalo bavit, dokončil právě rozepsané číslo a kriticky se podíval na svůj výtvor. Zjistil, že v posloupnosti číslic, které napsal, se vyskytuje pět jedniček bezprostředně za sebou.

1. Kolik nejméně po sobě jdoucích přirozených čísel musel František napsat?
2. Kolik nejméně číslic musel František napsat?

Možné řešení. 1. Aby bylo v řadě pět jedniček za sebou, musí být napsána čísla větší než 110 a řada vypadá takto:

$$123456789101112\ldots110\underline{11111}2\ldots$$

František napsal nejméně 112 za sebou jdoucích přirozených čísel.

2. Pro počítání číslic si uvědomíme, že v napsané řadě je 9 čísel jednomístných (čísla 1–9), 90 čísel dvojmístných (čísla 10–99) a aspoň 13 čísel trojmístných (čísla 100–112). Dohromady František napsal nejméně $9 + 90 \cdot 2 + 13 \cdot 3 = 228$ číslic.

Z5–I–3

Nejvyšší známá sopka na Zemi je Mauna Kea na Havajských ostrovech. Její výška od úpatí po vrchol je dokonce o 358 metrů větší, než je nadmořská výška nejvyšší hory světa, Mount Everestu. Nezvedá se však z pevniny, ale ze dna Tichého oceánu, z 5 000metrové hloubky. Kdyby mořská hladina v této oblasti klesla o 397 metrů, byla by ponořená část Mauna Key přesně stejně vysoká jako část, která by vyčnívala nad hladinu.

1. Jakou nadmořskou výšku má vrchol sopky?
2. Kolik měří Mauna Kea od úpatí po vrchol?
3. Jakou nadmořskou výšku má Mount Everest?

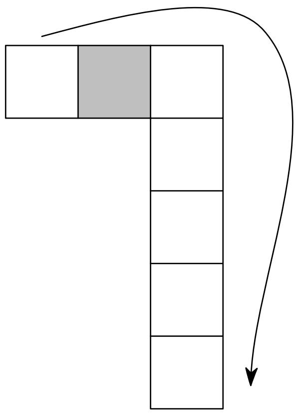
(Údaje o nadmořských výškách uváděné v různých zdrojích se mohou lišit, což je způsobeno nepřesnostmi měření, pohyby zemské kůry, vrstvou sněhové pokrývky apod. Při řešení úlohy proto vycházej pouze z údajů v ní uvedených.)

Možné řešení. 2. Kdyby mořská hladina klesla o 397 m, byla by ponořená část sopky $5\,000 - 397 = 4\,603$ (m). Sopka Mauna Kea tedy měří od úpatí po vrchol $4\,603 + 4\,603 =$ $= 9\,206$ (m).

1. Z toho plyne, že vrchol sopky je v nadmořské výšce $9\,206 - 5\,000 = 4\,206$ (m).

3. A Mount Everest má nadmořskou výšku $9\,206 - 358 = 8\,848$ (m).

Z5–I–4



Klasická hrací kostka se převracela naznačeným směrem po plánu na obrázku. Na každém políčku zůstaly otisknuty tečky ze stěny, kterou se kostka plánu dotýkala. Počet všech teček otisknutých na plánu byl 23.

Kolik teček bylo otisknuto na vybarveném políčku?

(Klasická hrací kostka má na stěnách tečky v počtu od 1 do 6 umístěné tak, že na protilehlých stěnách je vždy dohromady 7 teček. Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky.)

Možné řešení. Dvojice čísel ležících na protilehlých stěnách kostky jsou $(1, 6)$, $(2, 5)$ a $(3, 4)$. Při řešení úlohy je možné diskutovat všechny možnosti vzhledem k umístění kostky na prvním políčku plánu, což je zbytečně pracné. Jednodušší je uvědomit si, na kterých políčkách se otiskují protilehlé stěny. Označme a počet teček na stěně, kterou se kostka dotkne prvního políčka plánu, a b počet teček na stěně, kterou se kostka dotkne následujícího políčka plánu. Pak zjistíme, že na prvních třech políčkách jsou otisknuty následující počty teček:

a	b	$7-a$

Po převalení se na další políčko plánu nemůže dostat žádný z počtů a, $7-a$, b ani $7-b$. Označme tedy další otisknutý počet teček c. Postupně na plánu získáme počty zaznamenané na obrázku:

a	b	$7-a$
		c
		a
		$7-c$
		$7-a$

Můžeme si všimnout, že dvojice a, $7-a$ se na plánu vyskytuje dvakrát a dvojice c, $7-c$ jedenkrát. Součet těchto dvojic je vždy 7 a součet všech otisknutých teček je:

$$a+b+(7-a)+c+a+(7-c)+(7-a) = 3\cdot 7 + b = 21 + b.$$

Ve skutečnosti bylo otisknutých 23 teček, tedy $21+b=23$ a $b=2$.

Jiné řešení. Označme počty otisknutých teček na jednotlivých políčkách a až g jako na obrázku:

a	b	c
		d
		e
		f
		g

Na políčkách e a a je otištěna stejná stěna a rovněž na políčkách c a g je otištěna stejná stěna. Protože součet teček na protilehlých stěnách kostky je vždy sedm, platí při převracení kostky podle návodu, že $a+c=7$, $d+f=7$ a $e+g=7$ (podobně taky $c+e=7$, ale tento postřeh potřebovat nebudeme). Podle zadání byl součet všech otisknutých teček na políčkách $a + b + c + d + e + f + g = 23$, takže

$$\begin{aligned}(a + c) + (d + f) + (e + g) + b &= 23,\\ 7 + 7 + 7 + b &= 23,\\ 21 + b &= 23,\\ b &= 2.\end{aligned}$$

Na vybarveném políčku byly otisknuty dvě tečky.

Z5–I–5

Digitální hodiny ukazují hodiny a minuty, jako například 14:37.
Kolik minut denně svítí na těchto hodinách alespoň jedna pětka?

Možné řešení. Na 1. místě pětka svítit nemůže. Budeme nejdřív uvažovat interval prvních 12 hodin:

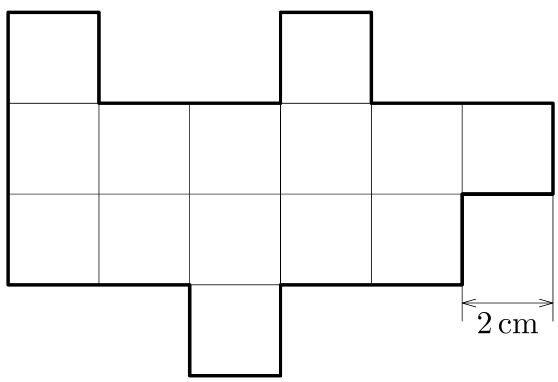
- Na 2. místě pětka svítí 60 minut (od 5:00 do 5:59); u dalších míst proto uvažujeme jen zbylých 11 hodin.
- Na 3. místě svítí pětka každou hodinu 10 minut (od $**$:50 do $**$:59); celkem $11 \cdot 10 = 110$ minut.
- Na 4. místě svítí pětka v každé hodině šestkrát po 1 minutě (05, 15, 25, 35, 45, 55), započteme však pouze 5 minut, neboť minuta $**$:55 je již započtena v předchozím odstavci; celkem $11 \cdot 5 \cdot 1 = 55$ minut.

Aspoň jedna pětka svítí v intervalu 12 hodin $60 + 110 + 55 = 225$ minut, za celý den tedy $2 \cdot 225 = 450$ minut, tj. 7 hodin 30 minut (na druhém místě je i v době od 15:00 do 15:59).

Jiné řešení. V době od 5:00 do 5:59 svítí 60 minut pětka na druhém místě (totéž v době 15:00 až 15:59). Pro každou z ostatních 22 hodin můžeme vypsat, ve kterých minutách bude svítit aspoň jedna pětka: 05, 15, 25, 35, 45, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, tj. celkem 15 minut. Dohromady za celý den to je $2 \cdot 60 + 22 \cdot 15 = 120 + 330 = 450$ minut.

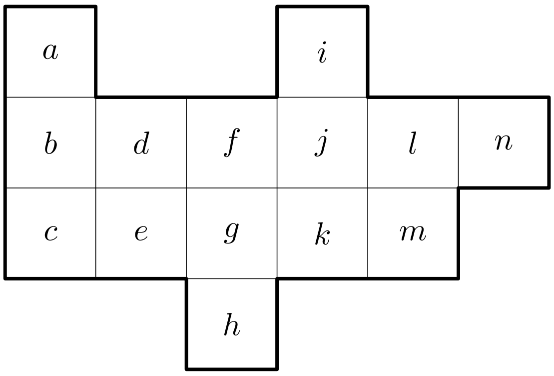
Z5–I–6

Dan si ze čtvercové sítě vystřihl útvar jako na obrázku.



Odstřihni dva čtverečky sítě tak, aby se výsledný útvar nerozpadl a měl co největší obvod. Najdi všechna řešení.

Možné řešení. Označíme jednotlivé čtverečky písmeny a až n:



Aby byl obvod nového útvaru největší možný, soustředíme se pouze na čtverečky, které v původním útvaru sousedí s nejvíce čtverečky. Současně musí po odstřižení každého čtverečku zůstat výsledný útvar pohromadě. Za těchto požadavků mohou být odstřiženy pouze čtverečky d, e, f, k.

Dvojice čtverečků (d, e), (e, f) a (f, k) odstřihnout nemůžeme, protože by se útvar rozpadl. Odstřižením dvojice (d, f) se zvětší obvod útvaru o $2 \cdot 2 = 4\,(\mathrm{cm})$ a odstřižením dvojice (d, k) nebo (e, k) se zvětší o $4 \cdot 2 = 8\,(\mathrm{cm})$. Protože jsme vyčerpali všechny možnosti, poslední dvě varianty představují řešení úlohy, viz obrázky.