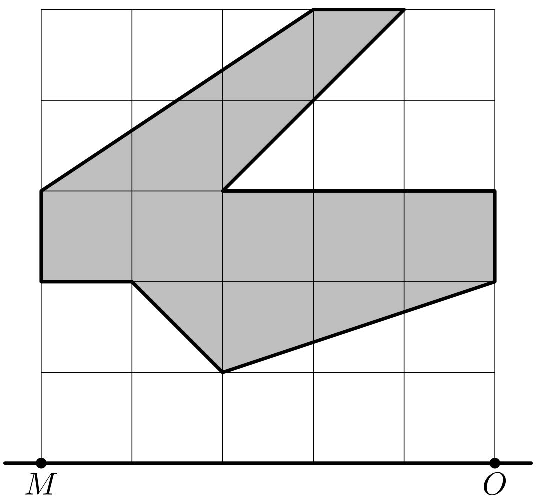
I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Na obrázku je čtvercová síť, jejíž čtverce mají stranu délky 1 cm. V síti je zakreslen obrazec vybarvený šedě. Libor má narýsovat přímku, která je rovnoběžná s přímkou MO a rozděluje šedý obrazec na dvě části o stejném obsahu.



V jaké vzdálenosti od přímky MO povede Libor tuto rovnoběžku?

Možné řešení. Obsah šedé plochy v horních dvou řádcích je

$$4 \cdot 2 - \frac{1}{2}(3 \cdot 2) - \frac{1}{2}(2 \cdot 2) = 3\,(\mathrm{cm}^2),$$

v prostředním řádku

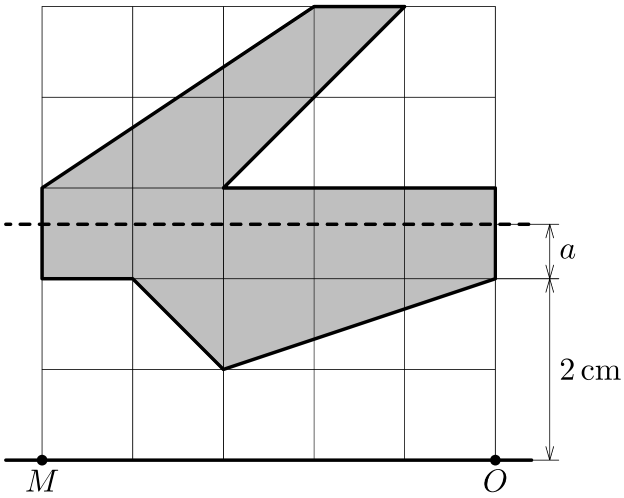
$$5 \cdot 1 = 5\,(\mathrm{cm}^2)$$

a ve druhém řádku odspoda

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(3 \cdot 1) = 2\,(\mathrm{cm}^2).$$

Obsah celého šedě vybarveného obrazce tedy je $3 + 5 + 2 = 10\,(\mathrm{cm}^2)$.

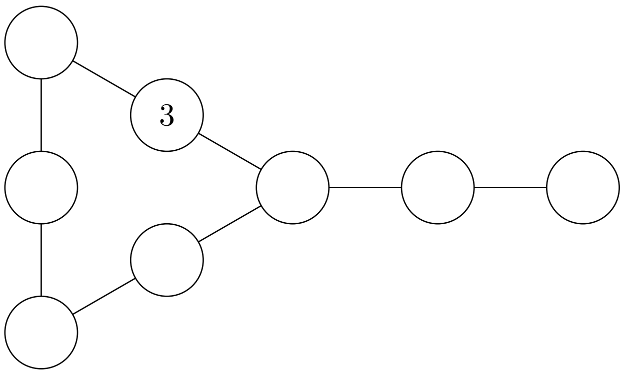
Zmíněná rovnoběžka má celý obrazec rozdělit na dvě části o obsahu $10 : 2 = 5\,(\mathrm{cm}^2)$. Odtud plyne, že tato přímka musí procházet prostředním řádkem tak, aby ho rozdělila na dva obdélníky, z nichž horní bude mít obsah $2\,\mathrm{cm}^2$ a dolní $3\,\mathrm{cm}^2$. Pro obsah dolního obdélníku tedy platí $5 \cdot a = 3$, kde a je kratší strana tohoto obdélníku, viz obrázek.



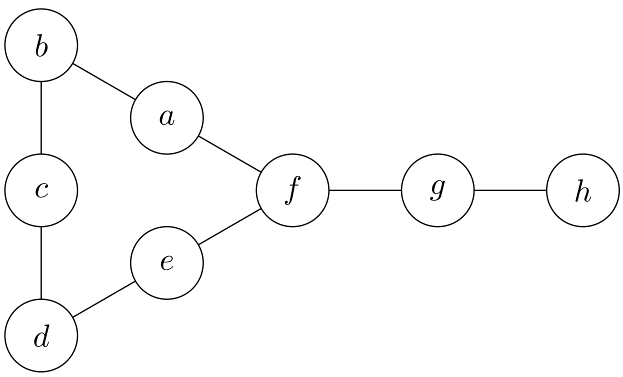
Odtud $a = \frac{3}{5} = 0{,}6\,(\mathrm{cm})$ a Libor povede rovnoběžku ve vzdálenosti $2 + 0{,}6 = 2{,}6\,(\mathrm{cm})$ od přímky MO.

Z6–I–2

Do prázdných polí vepiš čísla 2, 4, 6, 8, 12, 14 a 21 tak, aby tři čísla zapsaná na jedné úsečce dávala vždy stejný součin. Napiš svůj postup.



Možné řešení. Označme jednotlivá pole písmeny a až h jako na obrázku (víme, že $a = 3$):

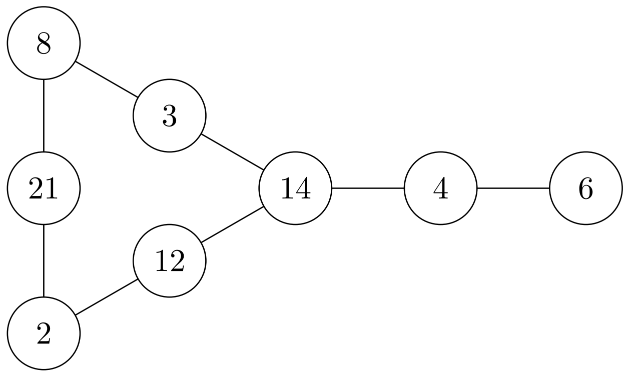


Mezi čísly v zadání jsou jen dva násobky sedmi, totiž 14 a 21. Aby byl násobek sedmi zastoupen na každé úsečce, mohou být čísla 14 a 21 jedině v polích c a f. Umístíme do pole f číslo 14, nebo 21? Pokud bychom se rozhodli pro $f = 21$, byl by součin $b \cdot a \cdot f$ násobkem devíti. Ale v nabídce v zadání by zbyly už pouze dva násobky tří (6 a 12), což by nám nestačilo k tomu, aby i součiny na všech dalších úsečkách byly násobky devíti. Proto je $f = 14$ a $c = 21$.

Protože $b \cdot a \cdot f = b \cdot c \cdot d$, musí platit $a \cdot f = c \cdot d$, a protože v této rovnosti všechna čísla kromě d již známe, snadno dopočítáme $d = 3 \cdot 14 : 21 = 2$.

Na úsečce def neznáme jen číslo e. Protože zde zatím není zastoupen násobek tří, musí to být 6 nebo 12. Protože $d \cdot e \cdot f = f \cdot g \cdot h$, musí platit $d \cdot e = g \cdot h$. Pokud bychom se rozhodli pro $e = 6$, platilo by $d \cdot e = 12$, a tedy i $g \cdot h = 12$. Ze zbylých čísel však do polí g a h neumíme doplnit hodnoty tak, aby jejich součin byl 12. Proto e není 6, ale 12.

Už známe součin $d \cdot e \cdot f$, tedy i součin na každé úsečce. Odtud snadno dopočítáme, že $b = 8$. Zbývající hodnoty g a h jsou buď 4 a 6, nebo opačně. Úloha má tedy dvě velmi podobná řešení, z nichž jedno je na následujícím obrázku:



Z6–I–3

B-banka vydává bankomatové karty se čtyřmístným PIN kódem, který neobsahuje číslici 0. Pan Skleróza se bál, že zapomene PIN kód své karty, proto si ho napsal přímo na ni, avšak římskými číslicemi IIIVIIIXIV, aby to případný zloděj neměl tak jednoduché. Svůj nápad prozradil nejlepšímu příteli, panu Odkoukalovi, který byl také klientem B-banky. Ten záhy se svým PIN kódem udělal totéž a na kartu si napsal IVIIIVI. Ke svému velkému překvapení však z římského zápisu neuměl svůj PIN kód určit přesně.

1. Jaký PIN kód má karta pana Sklerózy?
2. Jaký PIN kód může mít karta pana Odkoukala?

Možné řešení. 1. Jediný způsob, jak rozdělit IIIVIIIXIV na čtyři římské číslice s jednomístným dekadickým zápisem, je III VII IX IV. Pan Skleróza má tedy PIN 3794.

2. Zápis IVIIIVI pana Odkoukala dovoluje různou interpretaci, systematicky vypíšeme všechny možnosti:

- I V III VI, tj. PIN = 1536,
- I VI II VI, tj. PIN = 1626,
- I VII I VI, tj. PIN = 1716,
- I VII IV I, tj. PIN = 1741,

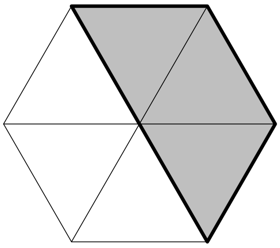
- I VIII V I, tj. PIN = 1851,
- IV I II VI, tj. PIN = 4126,
- IV II I VI, tj. PIN = 4216,
- IV II IV I, tj. PIN = 4241,
- IV III V I, tj. PIN = 4351.

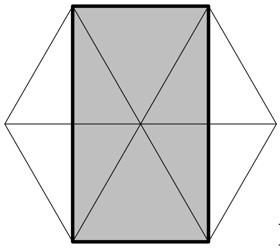
Z6–I–4

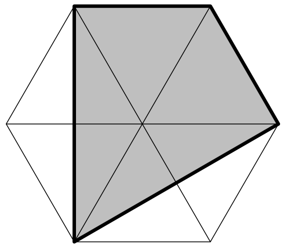
Načrtni všechny možné tvarově různé čtyřúhelníky, které mají vrcholy ve vrcholech daného pravidelného šestiúhelníku.

Urči, jaké by byly jejich obsahy, kdyby šestiúhelník měl obsah $156\,\mathrm{cm}^2$.

Možné řešení. Lze získat jen tři tvarově různé čtyřúhelníky I, II, III:

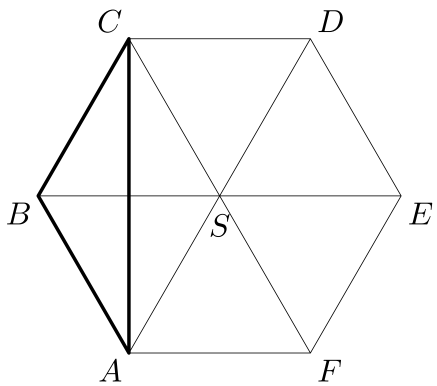

I


II


III

Čtyřúhelník I je polovinou šestiúhelníku, jeho obsah je tedy $78\,\mathrm{cm}^2$.

Čtyřúhelníky II a III získáme, když od šestiúhelníku oddělíme dva shodné trojúhelníky, mají proto stejné obsahy. Nejprve určíme obsahy trojúhelníků, které oddělíme; viz např. trojúhelník ABC:



Pravidelný šestiúhelník lze rozložit na 6 shodných trojúhelníků ($\triangle ABS$, $\triangle BCS$, $\triangle CDS$, ...) o stejném obsahu $156 : 6 = 26\,(\mathrm{cm}^2)$. Čtyřúhelník $ABCS$ je složen ze dvou takových trojúhelníků, má tedy obsah $52\,\mathrm{cm}^2$. Stejný čtyřúhelník lze rozdělit na jiné dva shodné trojúhelníky ABC a ACS, které mají též obsahy $26\,\mathrm{cm}^2$. Proto je obsah trojúhelníku ABC roven $26\,\mathrm{cm}^2$.

Obsah čtyřúhelníků II a III je proto $156 - 2 \cdot 26 = 104\,(\mathrm{cm}^2)$.

Z6–I–5

Paní Kučerová byla na sedmidenní dovolené a Káťa jí po celou tuto dobu venčila psa a krmila králíky. Dostala za to velký dort a 700 Kč. Po další dovolené, tentokrát čtyřdenní, dostala Káťa za venčení a krmení podle stejných pravidel stejný dort a 340 Kč.

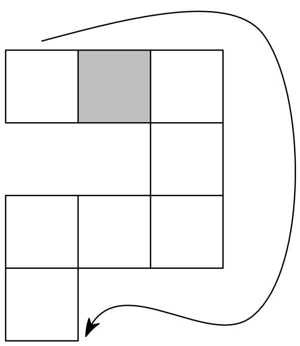
Jakou cenu měl dort?

Možné řešení. Jestliže je d neznámá cena dortu, pak $d + 700$ Kč je sedmidenní odměna pro Káťu. Odměna za jeden den je $\frac{1}{7}d + 100$ Kč, za čtyři dny má být $\frac{4}{7}d + 400$ Kč. Odměna však byla $d + 340$ Kč, tj. o $\frac{3}{7}d$ víc a 60 Kč méně. Tedy $\frac{3}{7}$ dortu odpovídají 60 Kč, $\frac{1}{7}$ dortu 20 Kč, celý dort $7 \cdot 20 = 140$ (Kč).

Jiné řešení. Káťa podruhé pracovala o 3 dny méně a dostala o $700 - 340 = 360$ (Kč) méně (dort měl stejnou cenu). To znamená, že za jeden den si vydělala $360 : 3 = 120$ (Kč). Za 4 dny práce si vydělala $4 \cdot 120 = 480$ (Kč), dostala však jeden dort a 340 Kč. Cena dortu je tedy $480 - 340 = 140$ (Kč).

Z6–I–6

Na každou stěnu hrací kostky jsme napsali jiné prvočíslo menší než 20 tak, aby součty dvou čísel na protilehlých stěnách byly vždy stejné.



Kostku jsme položili na první políčko plánu na obrázku nejmenším číslem dolů. Potom jsme kostku převraceli naznačeným směrem po plánu. Při každém dotyku kostky s plánem jsme na odpovídající políčko napsali číslo, kterým se ho kostka dotkla.

Kterým číslem se kostka dotkla zbarveného políčka, jestliže součet všech napsaných čísel byl nejmenší možný?

(Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky.)

Možné řešení. Prvočísla menší než 20 jsou 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 a 19. Z nich je potřeba vzít tři dvojice se stejným součtem, což jsou dvojice $(19, 5)$, $(17, 7)$ a $(13, 11)$. Kostka je na plán položena číslem 5, takže na vedlejší políčko se může otisknout jedno z čísel 17, 7, 13 nebo 11. Je možné diskutovat všechny možnosti vzhledem k umístnění zmiňovaných čtyř čísel na kostce, což je zbytečně pracné. Jednodušší je uvědomit si, na kterých políčkách se otiskují protilehlé stěny. Označme a číslo na stěně, kterou se kostka dotkne vybarveného políčka plánu. Pak zjistíme, že na prvních třech políčkách získáme následující čísla:

5	a	19

Označme b číslo na stěně, kterou se kostka dotkne následujícího políčka plánu. Číslo b musí být různé od a, 5, 19, $24 - a$. Nyní můžeme doplnit všechna políčka na plánu:

5	a	19
		b
19	a	5
$24-b$		

Můžeme si všimnout, že dvojice 5, 19 se na plánu vyskytuje dvakrát a dvojice b, $24-b$ jedenkrát. Součet těchto dvojic je vždy 24 a součet všech napsaných čísel je:

$$5 + a + 19 + b + 5 + a + 19 + (24 - b) = 3 \cdot 24 + 2a = 72 + 2a.$$

Součet tedy závisí jenom na čísle, jímž se kostka dotkne vybarveného políčka plánu. Toto číslo by mělo být nejmenší možné. Protože číslo 5 je již použito, musí jít o číslo 7.