I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Myslím si nezáporné číslo ve tvaru zlomku s celočíselným čitatelem a jmenovatelem 12. Když je napíši ve tvaru desetinného čísla, bude mít před i za desetinnou čárkou po jedné číslici, obě tyto číslice budou nenulové. Čísel, která mají obě uvedené vlastnosti, je více. Pokud je však seřadím od nejmenšího po největší, bude to „moje" předposlední.

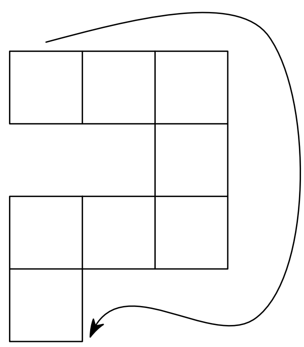
Jaké číslo si myslím?

Možné řešení. Vzhledem k tomu, že jmenovatel je 12, musí být čitatel dělitelný třemi, abychom dostali číslo s ukončeným desetinným rozvojem. Po vykrácení třemi vyjde ve jmenovateli číslo 4. Pak by na desetinných místech byly tyto skupiny: 25, 50, 75 a 00. Zadání vyhovuje pouze skupina 50, proto čitatel musí být lichý násobek šesti. Aby před desetinnou čárkou byla jedna nenulová číslice, musí být čitatel větší než 12 a menší než 120, tj. 18, 30, 42, ..., 102, 114. Hledané číslo je tedy $\frac{102}{12} = 8{,}5$.

Jiné řešení. Zlomky se jmenovatelem 12 vyjádříme jako smíšená čísla ve tvaru $a\frac{b}{12}$, kde $1 \leqq a \leqq 9$ a $1 \leqq b \leqq 11$. Zlomky $\frac{b}{12}$ převádíme na desetinná čísla dělením a zkoumáme desetinné rozvoje. Dojdeme ke stejnému výsledku.

Z8–I–2

Na každou stěnu hrací kostky jsme napsali jiné prvočíslo menší než 20 tak, aby součty dvou čísel na protilehlých stěnách byly vždy stejné.



Kostku jsme položili na první políčko plánu na obrázku. Potom jsme kostku převraceli naznačeným směrem po plánu. Při každém dotyku kostky s plánem jsme na odpovídající políčko napsali číslo, kterým se ho kostka dotkla.

Kterým svým číslem se kostka plánu nedotkla, jestliže součet všech napsaných čísel byl 86?

(Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky.)

Možné řešení. Prvočísla menší než 20 jsou 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 a 19. Z nich je potřeba vzít tři dvojice se stejným součtem, což jsou dvojice $(19, 5)$, $(17, 7)$ a $(13, 11)$. Kostka je na plán položena nějakým číslem, které označíme a. Je možné diskutovat všechny možnosti vzhledem k umístnění všech čísel na kostce, což je zbytečně pracné. Jednodušší je uvědomit si, na kterých políčkách se otiskují protilehlé stěny. Označme b číslo na stěně, kterou se kostka dotkne druhého políčka plánu. Pak zjistíme, že na prvních třech políčkách získáme následující čísla:

a	b	$24-a$

Označme c číslo na stěně, kterou se kostka dotkne následujícího políčka plánu. Číslo c musí být různé od a, b, $24-b$, $24-a$. Nyní můžeme doplnit všechna políčka na plánu:

a	b	$24-a$
		c
$24-a$	b	a
$24-c$		

Můžeme si všimnout, že dvojice a, $24-a$ se na plánu vyskytuje dvakrát a dvojice c, $24-c$ jedenkrát. Součet těchto dvojic je vždy 24 a součet všech napsaných čísel je:

$$a+b+(24-a)+c+a+b+(24-a)+(24-c)=3\cdot 24+2b=72+2b.$$

Z hodnoty součtu zjistíme číslo b: $2b=86-72=14$, tj. $b=7$. Kostka se ani jednou plánu nedotkla stěnou protilehlou ke stěně s číslem 7, nedotkla se tedy číslem 17.

Z8–I–3

Grafik v redakci novin dostal dva obrázky, aby je umístil k článku. První originál byl 13 cm široký a 9 cm vysoký, druhý měřil na šířku 14 cm a na výšku 12 cm. Grafik se rozhodl umístit obrázky na stránku vedle sebe tak, aby se dotýkaly a aby oba měly stejnou výšku. Po vytištění měly obrázky dohromady zaujímat šířku 18,8 cm. Obrázky tedy vhodně zmenšil, aniž by je jakkoli ořezával.

Jaká bude výška vytištěných obrázků?

Možné řešení. Nejprve druhý obrázek zmenšíme, aby měl stejnou výšku jako první, a poté oba zmenšíme/zvětšíme tak, aby dohromady měly danou šířku:

Aby druhý obrázek měl stejnou výšku jako první, musíme jej zmenšit v poměru $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$. ířka tohoto zmenšeného obrázku pak bude $\frac{3}{4}\cdot 14=10{,}5$ (cm). Nyní první obrázek a zmenšený druhý obrázek, položeny vedle sebe, tvoří obdélník s rozměry 23,5 cm × 9 cm. Tento celek zmenšíme tak, aby šířka byla rovna zadaným 18,8 cm. Zmenšíme jej tedy v poměru $\frac{18{,}8}{23{,}5}=\frac{4}{5}$ a výška celku potom bude $\frac{4}{5}\cdot 9=7{,}2$ (cm).

Z8–I–4

Máme dány tři navzájem různé nenulové číslice. Na tabuli napíšeme všechna trojciferná čísla, která lze složit z těchto číslic, přičemž pro každé číslo použijeme všechny tři číslice. Součet napsaných čísel je 1 776.

Se kterými třemi číslicemi jsme pracovali? Určete všechna řešení.

Možné řešení. Označme dané číslice a, b, c. Počítání na tabuli pak odpovídá tento součet:

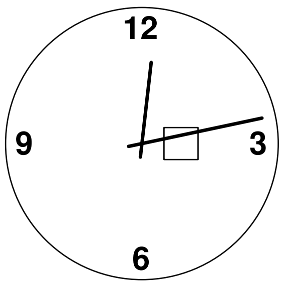
$$\begin{array}{r} abc \\ acb \\ bac \\ bca \\ cab \\ cba \\ \hline 1\,776 \end{array}$$

V každém sloupci sčítáme stejnou šestici číslic, a sice $a + a + b + b + c + c$. Z celkového výsledku je zřejmé, že součet těchto šesti číslic je 16, tedy $a + b + c = 8$. Jediné možnosti, jak napsat 8 v tomto tvaru, jsou $8 = 1+1+6 = 1+2+5 = 1+3+4 = 2+2+4 = 2+3+3$. Podmínkám v zadání odpovídají dvě trojice číslic: 1, 2, 5 a 1, 3, 4.

Poznámka. Předchozí výpočet na tabuli můžeme napsat jako $(100a+10b+c)+(100a+ +10c+b)+(100b+10a+c)+(100b+10c+a)+(100c+10a+b)+(100c+10b+a) = 1776$, tedy $222a + 222b + 222c = 1776$. Po úpravě dostáváme $a + b + c = 8$ a závěr je stejný.

Z8–I–5

Na věži radnice jsou hodiny, které mají blízko středu ciferníku dvířka používaná při údržbě. Dvířka se však otevírají ven, což je nepraktické — například přesně v 12:09 zakryje velká ručička dvířka, která pak nejdou otevřít po dobu, jež končí přesně v 12:21.



Kolik minut denně dvířka nelze otevřít?

(Nezapomeňte, že dvířka může zakrýt i malá ručička; celá dvířka leží v kruhu, který tato ručička opisuje.)

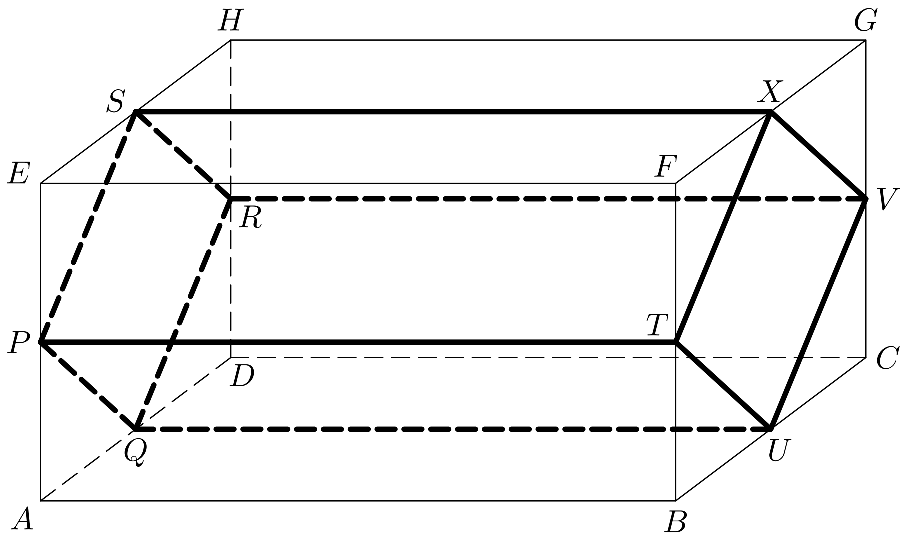
Možné řešení. Každou hodinu jsou dvířka blokována velkou ručičkou od 9. do 21. minuty po celé hodině, tj. 12 minut. Potřebujeme dořešit, kdy přesně zakrývá dvířka malá ručička: 9 minut po celé hodině ukazuje velká ručička tam, kam malá v 1:48, a 21 minut po celé ukazuje velká ručička tam, kam malá ve 4:12. Od 1:48 do 4:12 jsou dvířka zakrytá malou ručičkou a stejně tak ještě po poledni. Počítejme od půlnoci po hodinách, kdy nelze dvířka otevřít:

- 0:09–0:21, tj. 12 minut,
- 1:09–1:21 a 1:48–2:00, tj. 24 minut,
- 2:00–3:00, tj. 60 minut,
- 3:00–4:00, tj. 60 minut,
- 4:00–4:21, tj. 21 minut,
- 5:09–5:21, tj. 12 minut,
- 6:09–6:21, tj. 12 minut,
- atd. až do poledne, tj. ještě $5 \cdot 12$ minut.

Od půlnoci do poledne nelze dvířka otevřít $8 \cdot 12 + 24 + 2 \cdot 60 + 21 = 261$ minut, takže za celý den to je $2 \cdot 261 = 522$ minut.

Z8–I–6

V kvádru $ABCDEFGH$ je umístěno těleso $PQRSTUVX$, jehož vrcholy jsou středy hran kvádru, viz obrázek.



Vypočtěte objem a povrch tělesa, je-li: $|AB| = 8\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 6\,\mathrm{cm}$, $|BF| = 4\,\mathrm{cm}$.

Možné řešení. Čtyřúhelník $PQRS$ v obdélníku $ADEH$ je kosočtverec, jehož obsah je $S_p = \frac{1}{2}|AD| \cdot |AE| = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12\,(\mathrm{cm}^2)$. Těleso $PQRSTUVX$ je hranol s podstavou kosočtverce a výškou $|AB|$, jeho objem je tedy roven $S_p \cdot |AB| = 12 \cdot 8 = 96\,(\mathrm{cm}^3)$.

Pro výpočet povrchu potřebujeme znát délku strany kosočtverce. Strana RS je přepona v pravoúhlém trojúhelníku RHS, tedy $|RS| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}\,(\mathrm{cm})$. Plášť hranolu $PQRSTUVX$ má obsah $S_{pl} = 4 \cdot |RS| \cdot |AB| = 4 \cdot \sqrt{13} \cdot 8 \doteq 115{,}4\,(\mathrm{cm}^2)$. Povrch hranolu je tedy roven $2 \cdot S_p + S_{pl} \doteq 2 \cdot 12 + 115{,}4 \doteq 139{,}4\,(\mathrm{cm}^2)$.