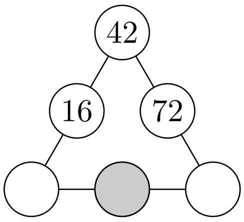
58. ročník Matematické olympiády

I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Do tří prázdných polí na obrázku patří taková přirozená čísla, aby součin tří čísel na každé straně trojúhelníku byl stejný.



Jaké nejmenší a jaké největší číslo může být za této podmínky vepsáno do šedě vybarveného pole?

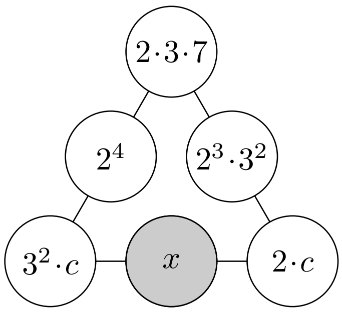
Možné řešení. Zadaná čísla levé strany trojúhelníku dávají součin

$$16 \cdot 42 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$$

a zadaná čísla pravé strany dávají součin

$$42 \cdot 72 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7.$$

Aby součin všech čísel na levé straně byl stejný jako na pravé, musí číslo v levém dolním rohu obsahovat ve svém rozkladu činitel 3^2 a číslo v pravém dolním rohu činitel 2. Číslo v levém dolním rohu vyjádříme jako $3^2 \cdot c$, kde c označuje libovolné přirozené číslo. V pravém dolním rohu pak musí být $2 \cdot c$ a součin na levé i pravé straně je $2^5 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot c$.



Pokud číslo v šedém poli označíme x, pak podmínka ze zadání znamená

$$3^2 \cdot c \cdot x \cdot 2 \cdot c = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot c,$$

odkud po úpravě vyjádříme

$$x = \frac{2^4 \cdot 3 \cdot 7}{c} = \frac{336}{c}.$$

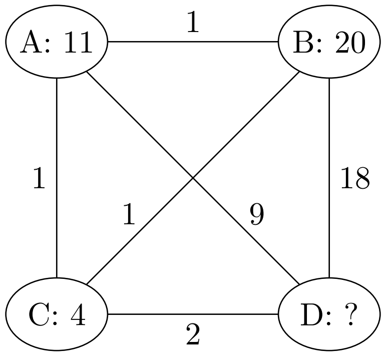
Hodnota x je nejmenší, pokud c je největší dělitel čísla v čitateli, tj. $c = 336$ a $x = 1$. Hodnota x je největší, pokud c je nejmenší kladný dělitel čísla v čitateli, tj. $c = 1$ a $x = 336$.

Z9–I–2

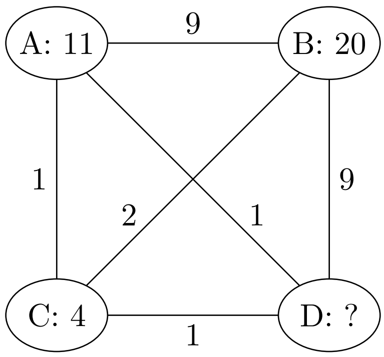
Alena, Bára, Čeněk a David si společně koupili tandem — jízdní kolo pro dva. Na projížďku vyrážejí vždy ve dvojici. Každý jel s každým už alespoň jednou a nikdo jiný se na tandemu ještě nevezl. Alena byla na projížďce jedenáctkrát, Bára dvacetkrát, Čeněk jen čtyřikrát.

Určete, kolikrát minimálně a kolikrát maximálně mohl být na projížďce David.

Možné řešení. Pokud by Alena, Bára a Čeněk jeli každý s každým právě jednou a zbytek výletů by strávili s Davidem, tak by byl David na projížďce 29krát, protože $(11-2)+(20-2)+(4-2)=29$. Dvacet devět je nejvyšší možný počet. Schematicky je toto řešení znázorněno na následujícím obrázku. (Např. číslo u písmene B znamená, kolikrát celkem byla Bára na projížďce, číslo u spojnice BC vyjadřuje, kolikrát si Bára vyjela s Čeňkem…)



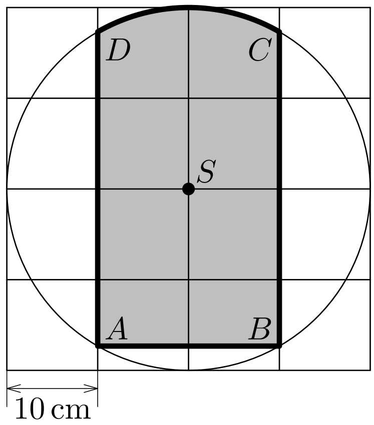
Pro řešení zbytku úlohy chceme zajistit, aby Alena, Bára a Čeněk projezdili spolu navzájem co nejvíce jízd. Alena s Bárou mohla jet maximálně 9krát $(11-2=9)$. Čeněk mohl jet jak s Alenou, tak s Bárou maximálně 2krát $(4-2=2)$, avšak tohoto maximálního počtu nemohl dosáhnout s oběma zároveň, protože musel jet alespoň jednou s Davidem. Při dvou jízdách Čeňka s Alenou by nemohlo být dosaženo maxima jízd Aleny s Bárou, proto dvě jízdy Čeněk realizoval s Bárou. Odtud pak plyne, kolikrát byl na projížďce David: s Alenou a s Čeňkem jednou, s Bárou 9krát $(20-9-2=9)$, dohromady pak 11krát $(1+1+9=11)$. Pro lepší orientaci v textu viz obrázek:



David mohl být na projížďce minimálně 11krát, maximálně 29krát.

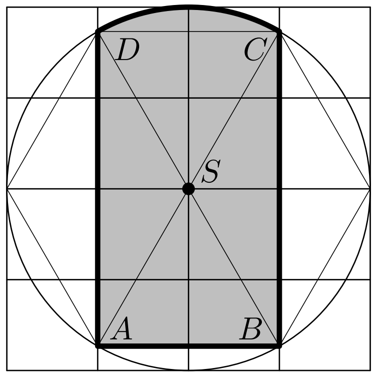
Z9–I–3

Ve čtvercové síti, jejíž čtverce mají stranu délky 10 cm, je narýsována kružnice se středem S ve vyznačeném mřížovém bodě a poloměrem 20 cm.



Body A, B, C a D jsou průsečíky kružnice se síťovými přímkami.
Určete obsah vybarvené plochy $ABCD$.

Možné řešení. Úsečka AB má délku rovnu poloměru zadané kružnice. Můžeme ji tedy považovat za stranu pravidelného šestiúhelníku vepsaného do této kružnice. Tento šestiúhelník rozdělíme na šest rovnostranných trojúhelníků, viz obrázek.



Nejdřív spočítáme obsah S_1 rovnostranného trojúhelníku o straně $r = 20\,\mathrm{cm}$. Výšku tohoto trojúhelníku vyjádříme z Pythagorovy věty $r^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + v^2$. Dostaneme $v = \frac{\sqrt{3}}{2}r$, tudíž

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2.$$

Vybarvená plocha se skládá z pětiúhelníku $ABCSD$, jehož obsah je $3S_1$, a kruhové výseče DSC. Kruhová výseč tvoří šestinu kruhu, její obsah je tedy roven

$$S_2 = \frac{1}{6}\pi r^2.$$

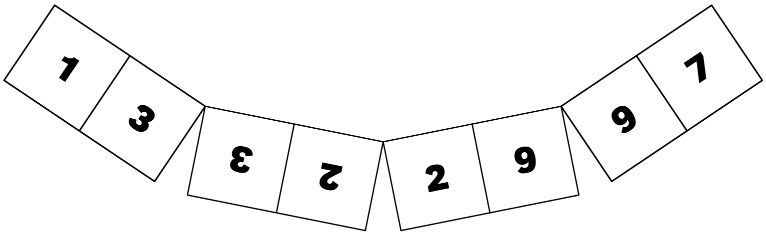
Obsah vybarvené plochy je celkem

$$S = 3S_1 + S_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 + \frac{1}{6}\pi r^2 = \frac{9\sqrt{3} + 2\pi}{12}r^2.$$

Po dosazení dostaneme přibližně $S \doteq 729\,\mathrm{cm}^2$.

Z9–I–4

Dominik si vyrobil „prvočíselné domino“ — každá kostka odpovídala jednomu dvojmístnému prvočíslu tak, že na každé polovině kostky byla jedna číslice tohoto prvočísla. Žádné dvojmístné prvočíslo v dominu nechybělo a žádné prvočíslo nebylo na dvou kostkách.



Dominik se rozhodl, že všechny kostky uspořádá do kružnice tak, aby kostky ležící vedle sebe sousedily stejnou číslicí, viz obrázek. Jeho kamarád Bořek mu řekl, že to nelze provést. Měl Bořek pravdu?

Možné řešení. V kružnici sestavené podle zadání se mají každé dvě sousední kostky dotýkat stejnou číslicí, každá číslice tedy musí být v kružnici zastoupena v sudém počtu. Všechna dvojmístná prvočísla jsou

$$11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$$

a počty jednotlivých číslic mezi těmito čísly jsou:

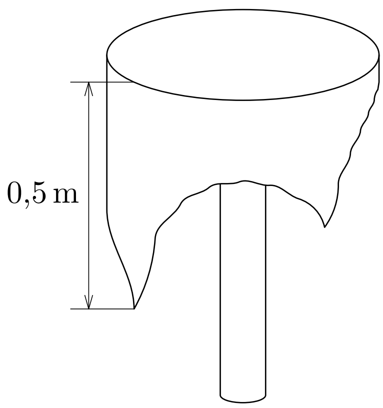
číslice	1	2	3	4	5	6	7	8	9
její počet	9×	2×	8×	3×	2×	2×	8×	2×	6×

Vidíme, že číslice 1 a 4 jsou obě zastoupeny v lichém počtu. Bořek měl tudíž pravdu a takovou kružnici nelze sestavit.

Poznámka. Lichý počet číslic 4 (resp. 1) postačuje jako důkaz toho, že kružnici nelze sestavit. Není nutné vypisovat celou tabulku.

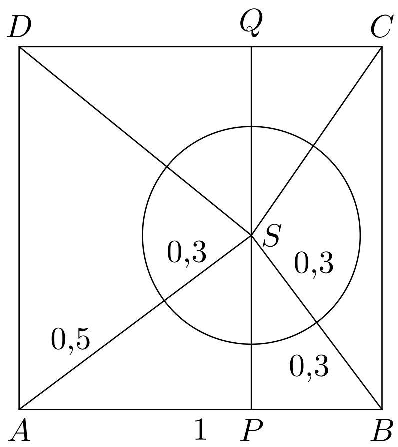
Z9–I–5

Na stole s kruhovou deskou o průměru 0,6 m je „nakřivo“ položen čtvercový ubrus se stranou 1 m. Jeden cíp ubrusu přečnívá přes hranu desky stolu 0,5 m, sousední cíp 0,3 m.



Určete délku přesahu zbylých dvou cípů.

Možné řešení. Vrcholy čtvercového ubrusu, které tvořily konce dvou cípů známých délek, označme po řadě A a B; zbylé vrcholy čtverce označíme C a D. Bod S ukazuje, kde se ubrus dotýkal středu desky stolu. Poloměr desky stolu je 0,3 m.



V trojúhelníku ABS známe ze zadání všechny strany: $|AB| = 1\,\mathrm{m}$, $|BS| = 0{,}6\,\mathrm{m}$ a $|SA| = 0{,}8\,\mathrm{m}$. Protože platí $1^2 = 0{,}6^2 + 0{,}8^2$ (Pythagorova věta), jde o trojúhelník pravoúhlý.

Označme P patu výšky v trojúhelníku ABS na stranu AB. Obsah tohoto trojúhelníku můžeme vyjádřit dvěma způsoby, a sice

$$S = \frac{1}{2}|BS| \cdot |SA| = \frac{1}{2}|AB| \cdot |PS|,$$

z čehož lze odvodit vztah pro výpočet velikosti výšky PS:

$$|PS| = \frac{|BS| \cdot |SA|}{|AB|} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}8}{1} = 0{,}48\,(\mathrm{m}).$$

Podle Pythagorovy věty vypočítáme délku strany AP trojúhelníku APS a pak určíme délku úsečky PB:

$$|AP| = \sqrt{|SA|^2 - |PS|^2} = \sqrt{0{,}8^2 - 0{,}48^2} = 0{,}64\,(\mathrm{m}),$$
$$|PB| = |AB| - |AP| = 1 - 0{,}64 = 0{,}36\,(\mathrm{m}).$$

V trojúhelníku SCD označme Q patu výšky na stranu CD. Úsečky DQ, QC odpovídají svými velikostmi úsečkám AP, PB. Vypočítáme velikost výšky SQ:

$$|SQ| = |PQ| - |PS| = 1 - 0{,}48 = 0{,}52\,(\mathrm{m}).$$

Podle Pythagorovy věty vypočítáme délky přepon trojúhelníků SCQ a SQD:

$$|SC| = \sqrt{|QC|^2 + |QS|^2} = \sqrt{0{,}36^2 + 0{,}52^2} = \sqrt{0{,}4} \doteq 0{,}63\,(\mathrm{m}),$$
$$|SD| = \sqrt{|QD|^2 + |QS|^2} = \sqrt{0{,}64^2 + 0{,}52^2} = \sqrt{0{,}68} \doteq 0{,}82\,(\mathrm{m}).$$

Když od těchto délek odečteme poloměr desky stolu, zjistíme, že délky přesahů zbylých cípů ubrusu jsou přibližně 0,33 m a 0,52 m.

Z9–I–6

Čtyři tatínkové chtěli dětem sponzorovat lyžařský zájezd.
První slíbil: „Dám 11 500 Kč,“
druhý slíbil: „Dám třetinu toho, co vy ostatní dohromady,“
třetí slíbil: „Já dám čtvrtinu toho, co vy ostatní dohromady,“
čtvrtý slíbil: „A já dám pětinu toho, co vy ostatní dohromady.“
Kolik korun slíbil druhý, třetí a čtvrtý tatínek?

Možné řešení. Dal-li druhý tatínek třetinu toho, co ostatní, dal čtvrtinu celého příspěvku. (Označíme-li jeho příspěvek x, dali ostatní $3x$. Je-li celý obnos p, platí $x+3x = p$, tedy $x = \frac{p}{4}$.) Podobně, dal-li třetí čtvrtinu toho, co ostatní, dal pětinu celého obnosu, a dal-li čtvrtý pětinu toho, co ostatní, dal šestinu celého daru. Platí tedy

$$p = 11\,500 + \frac{p}{4} + \frac{p}{5} + \frac{p}{6}.$$

Po úpravě máme $\left(1 - \frac{37}{60}\right) p = 11\,500$ Kč, tedy celý příspěvek p činil $30\,000$ Kč. Odtud již snadno uzavřeme, že druhý tatínek dal $\frac{p}{4} = 7\,500$ Kč, třetí $\frac{p}{5} = 6\,000$ Kč a čtvrtý $\frac{p}{6} = 5\,000$ Kč.

Poznámka. Pokud označíme příspěvek druhého, třetího, resp. čtvrtého tatínka x, y, resp. z, pak výsledné hodnoty jsou řešením následující soustavy rovnic:

$$x = \frac{1}{3}(11\,500 + y + z),\ y = \frac{1}{4}(11\,500 + x + z),\ z = \frac{1}{5}(11\,500 + x + y).$$