

II. kolo kategorie Z7

Z7–II–1

Radovan čte zajímavou knížku. Včera přečetl 15 stran, dnes dalších 12 stran. S údivem si uvědomil, že součet čísel stran, které přečetl včera, je stejný jako součet čísel stran, které přečetl dnes. Kterou stránkou začne zítřejší četbu? (Radovan při četbě žádné stránky nepřeskakuje ani nečte žádnou stránku podruhé. Denní četbu nikdy neskončí rozečtenou stránkou.) (M. Petrová)

Možné řešení. Je zřejmé, že strany, které Radovan přečetl dnes, mají větší čísla než ty, které přečetl včera. První dnes přečtená strana má číslo o 15 větší než první strana přečtená včera. („Mezi nimi“ je zbylých 14 stran, které přečetl včera.) Druhá dnes přečtená strana má opět číslo o 15 větší než druhá včera přečtená strana. (Číslo každé z nich se zvýšilo o jedna.) Takto můžeme uvažovat dál — vše je symbolicky znázorněno v následujícím schématu:

Včera přečtené strany:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Dnes přečtené strany:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.			

Protože součet čísel stran přečtených včera má být roven součtu čísel stran přečtených dnes, musí být součet čísel na 13., 14. a 15. včera přečtené straně roven součtu „navýšení“ předchozích dvanácti stran. To znamená, že součet čísel z posledních tří včera přečtených stran je roven $12 \cdot 15 = 180$. Je-li součet tří po sobě jdoucích přirozených čísel 180, je prostřední z nich rovno $180 : 3 = 60$, nejmenší 59, největší 61. Snadno dopočítáme, že Radovan včera přečetl strany s čísly 47 až 61, dnes s čísly 62 až 73. Zítra začne číst stránku s číslem 74.

Poznámka. Analogicky lze postupovat i porovnáním 4. až 15. včerejší stránky s dnešními. Takto by se odvodilo, že součet čísel prvních tří včera přečtených stran musí být roven $12 \cdot 12 = 144$, tj. první tři včerejší strany jsou 47, 48 a 49 a zbytek řešení se nemění.

Hodnocení. 3 body za jakoukoli formu výše uvedeného schématu; 2 body za určení přečtených stránek; 1 bod za výsledek.

Z7–II–2

Tajný agent se snaží rozluštit přístupový kód. Zatím získal tyto informace:

- je to čtyřmístné číslo,
- není dělitelné sedmi,
- číslice na místě desítek je součtem číslice na místě jednotek a číslice na místě stovek,
- číslo vytvořené z prvních dvou číslic kódu (v tomto pořadí) je patnáctinásobkem poslední číslice kódu,
- první a poslední číslice kódu (v tomto pořadí) tvoří prvočíslo.

Stačí mu tyto informace k rozluštění kódu? Svůj závěr zdůvodni. (M. Petrová)

Možné řešení. Uvedené informace budeme využívat v takovém pořadí, aby nám v daný okamžik „pomohla“ co nejvíc.

Podle první informace hledáme čtyřmístné číslo a podle čtvrté informace vypíšeme možnosti, které přichází v úvahu:

15*1
30*2
45*3
60*4
75*5
90*6

(Další možnosti už nejsou, protože $15 \cdot 7 = 105 > 99$.)

Podle třetí informace doplníme chybějící číslici:

1561
3022
4583
6044
75*5 nelze doplnit
9066

Podle druhé informace hledáme ta čísla, která nejsou dělitelná sedmi:

1561 nevyhovuje
3022 vyhovuje
4583 vyhovuje
6044 vyhovuje
9066 vyhovuje

Podle páté informace vytvoříme uvedená dvojmístná čísla a vybereme ty možnosti, kdy dostaneme prvočíslo:

3022 vytvoříme 32, nevyhovuje
4583 vytvoříme 43, vyhovuje
6044 vytvoříme 64, nevyhovuje
9066 vytvoříme 96, nevyhovuje

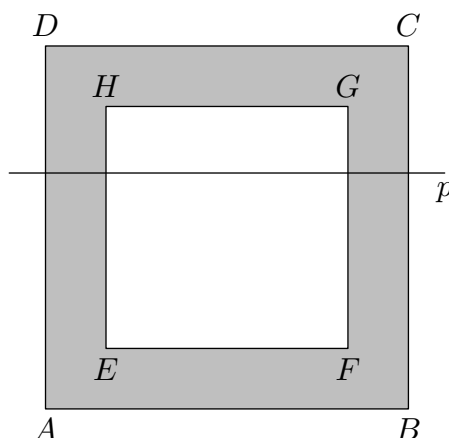
Ze všech čtyřmístných čísel splňuje uvedených pět podmínek číslo jediné, a to 4583. To znamená, že tyto informace stačí tajnému agentovi k rozluštění přístupového kódu.

Poznámka. Pokud při řešení použijeme pátou informaci dříve než druhou, vyloučíme tím všechna sudá čísla (vytvořené dvojmístné číslo bude sudé, tedy to nebude prvočíslo). Na prověřování dělitelnosti sedmi pak zůstávají čísla 1561 a 4583.

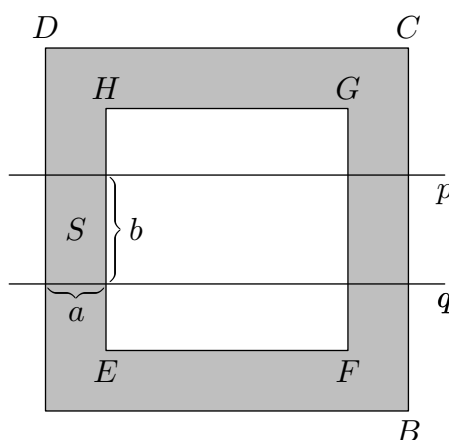
Hodnocení. 2 body za vytipování čísel užitím čtvrté informace; 3 body za postupné vylučování čísel užitím dalších informací; 1 bod za vysvětlení, že tyto informace agentovi stačí.

Z7-II-3

Na obrázku je čtverec $ABCD$ o straně délky 10 cm a menší čtverec $EFGH$, jehož vrcholy E, F, G, H leží na úhlopříčkách AC, BD čtverce $ABCD$ (viz obrázek). Plocha, která leží uvnitř čtverce $ABCD$ a přitom vně čtverce $EFGH$, je označena šedě. Přímka p , která je rovnoběžná s AB ve vzdálenosti 6,5 cm a prochází čtvercem $EFGH$, rozděluje šedou plochu na dvě části. Obsah jedné této části je o $13,8 \text{ cm}^2$ větší než obsah druhé. Vypočítej délku strany EF . (L. Šimůnek)



Možné řešení. Rovnoběžné přímky p a DC jsou vzdáleny 3,5 cm. Ve vzdálenosti 3,5 cm od přímky AB vedme přímku q , která prochází čtvercem $EFGH$.



Přímky p a q vymezují z šedé plochy dva stejné obdélníky, které společně představují zadaný rozdíl obsahů. Obsah jednoho z nich označme S , jeho strany a a b (viz obrázek). Vypočítáme S , b , posléze a :

$$\begin{aligned} S &= 13,8 : 2 = 6,9 \text{ (cm}^2\text{)}, \\ b &= 10 - 2 \cdot 3,5 = 3 \text{ (cm)}, \\ a &= S : b = 6,9 : 3 = 2,3 \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

Velikost strany EF je $10 - 2a$, tj. $10 - 2 \cdot 2,3 = 5,4$ (cm).

Hodnocení. 2 body za pomocnou přímku; 3 body za délku strany a ; 1 bod za délku strany EF .