MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

pro žáky
základních škol a nižších ročníků víceletých gymnázií

59. ROČNÍK, 2009/2010

http://math.muni.cz/mo

Milí mladí přátelé,

máte rádi zajímavé matematické úlohy a chtěli byste si v jejich řešení zasoutěžit? Jestliže ano, zveme vás k účasti v matematické olympiádě (MO). Soutěž je dobrovolná a nesouvisí s klasifikací z matematiky. Mohou se jí zúčastnit žáci 5. až 9. ročníků základních škol a žáci jim odpovídajících ročníků víceletých gymnázií vždy ve svých kategoriích. Podrobnější rozdělení uvádí následující tabulka.

ročník			kategorie
ZŠ	8leté G	6leté G	
9	4	2	Z9
8	3	1	Z8
7	2	–	Z7
6	1	–	Z6
5	–	–	Z5

Se souhlasem svého učitele matematiky můžete soutěžit i v některé kategorii určené pro vyšší ročník nebo v některé kategorii A, B, C, P, které jsou určeny pro studenty středních škol. Soutěžní úlohy pro kategorie A, B, C, P jsou uveřejněny v letáku Matematická olympiáda na středních školách.

Průběh soutěže

Soutěž v jednotlivých kategoriích probíhá ve dvou nebo ve třech kolech.

Kategorie Z9 má školní, okresní a krajské kolo.
Kategorie Z8, Z7, Z6 a Z5 mají školní a okresní kolo.

Školní kolo: V tomto vstupním kole soutěže, organizovaném na školách, řeší žáci ve svém volném čase (doma) šest úloh uveřejněných v tomto letáku. Do soutěže budou zařazeni žáci, kteří odevzdají svým učitelům matematiky řešení alespoň čtyř úloh. Všem soutěžícím však doporučujeme, aby se snažili vyřešit všechny úlohy, protože v dalším průběhu soutěže mohou být zadány podobné úlohy.

Řešení úloh odevzdávejte svým učitelům matematiky v těchto termínech:

Kategorie Z5, Z9: první trojici úloh do **6. listopadu 2009** a druhou trojici úloh do **6. ledna 2010**.
Kategorie Z6 až Z8: první trojici úloh do **11. prosince 2009** a druhou trojici úloh do **5. března 2010**.

Vaši učitelé úlohy opraví a ohodnotí podle stupnice *1 – výborně, 2 – dobře, 3 – nevyhovuje*. Pak je s vámi rozeberou, vysvětlí vám případné nedostatky a seznámí vás se správným, popřípadě i jiným řešením. Úspěšnými řešiteli školního kola se stanou ti soutěžící, kteří budou mít alespoň u čtyř úloh řešení hodnocena výborně nebo dobře.

Práce všech úspěšných řešitelů kategorií Z6 až Z9 zašle vaše škola okresní komisi MO. Ta z nich vybere nejlepší řešitele a pozve je k účasti v okresním kole soutěže. Výběr účastníků v kategorii Z5 provádějí po dohodě s okresní komisí MO školy, které okresní kolo pořádají (viz níže).

Okresní kolo se uskuteční
pro kategorii Z9 **27. ledna 2010**,
pro kategorii Z6 až Z8 **7. dubna 2010**,
pro kategorii Z5 **27. ledna 2010**.

Okresní kolo pro kategorie Z6 až Z9 se pořádá zpravidla v okresním městě, v kategorii Z5 okresní kolo probíhá na několika školách okresu pověřených pořádáním.

Žáci pozvaní do okresního kola kategorie Z9 budou řešit samostatně v průběhu 4 hodin 4 soutěžní úlohy. Pozvaní žáci kategorií Z6 až Z8 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 2 hodin. Pozvaní žáci kategorie Z5 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 1 hodiny.

Ve všech kategoriích se řešení úloh obodují a podle součtu získaných bodů se sestaví pořadí účastníků okresního kola. Účastníci, kteří získají předepsaný počet bodů (zpravidla aspoň polovinu z dosažitelných bodů), se stanou úspěšnými řešiteli okresního kola a nejlepší z nich budou odměněni.

Krajské kolo pro kategorii Z9 se bude konat **24. března 2010** v některém městě vašeho kraje. Průběh soutěže a její vyhodnocení je stejné jako při okresním kole. Nejlepší účastníci krajského kola jsou vyhlášeni jeho vítězi.

Matematickou olympiádu pořádají *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav Akademie věd České republiky.* Soutěž organizuje *ústřední komise MO*, v krajích ji řídí *krajské komise MO* při pobočkách JČMF a v okresech *okresní komise MO.* Na jednotlivých školách ji zajišťují pověření učitelé matematiky. Vy se obracejte na svého učitele matematiky.

Pokyny a rady soutěžícím

Řešení soutěžních úloh vypracujte čitelně na listy formátu A4. Každou úlohu začněte na novém listě a uveďte vlevo nahoře záhlaví podle vzoru:

Karel Veselý
8. B
ZŠ, Kulaté nám. 9, 629 79 Lužany
okres Znojmo
2009/2010
Úloha Z8–I–3

Řešení pište tak, aby bylo možno sledovat váš myšlenkový postup, podrobně vysvětlete, jak jste uvažovali. Uvědomte si, že se hodnotí nejen výsledek, ke kterému jste došli, ale hlavně správnost úvah, které k němu vedly.

Práce, které nebudou splňovat tyto podmínky nebo nebudou odevzdány ve stanoveném termínu, nebudou do soutěže přijaty.

Na ukázku uvedeme řešení úlohy z II. kola kategorie Z8 z jednoho z předcházejících ročníků MO:

Úloha Z8–II-1. *Je dán obdélník s celočíselnými délkami stran. Jestliže zvětšíme jednu jeho stranu o 4 a druhou zmenšíme o 5, dostaneme obdélník s dvojnásobným obsahem. Určete strany daného obdélníku. Najděte všechny možnosti.*

Řešení. Délky stran obdélníku označíme a, b. Nový obdélník má délky stran $a+4$, $b-5$. Podle podmínky úlohy pro obsahy obou obdélníků platí

$$2ab = (a+4)(b-5).$$

Postupně upravíme:

$$\begin{aligned} ab - 4b + 5a &= -20 \\ ab - 4b + 5a - 20 &= -40 \\ (a-4)(b+5) &= -40 \end{aligned}$$

(Odečteme 20, abychom levou stranu mohli rozložit na součin.)

Řešení najdeme rozkladem čísla -40 na 2 činitele. Přitom musí být $a > 0$, $b > 0$, a tedy $a - 4 > -4$, $b + 5 > 5$. Jsou dvě možnosti:

$$(-2) \cdot 20 = -40 \qquad \text{a} \qquad (-1) \cdot 40 = -40.$$

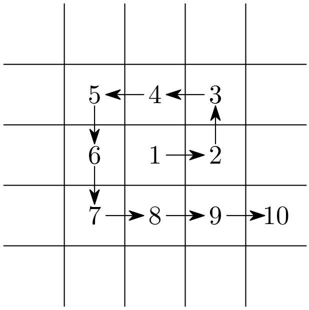
V prvním případě dostaneme obdélník o stranách $a = 2$, $b = 15$ s obsahem $S = 30$. Nový obdélník pak má strany $a' = 6$, $b' = 10$ a obsah $S' = 60$, tj. $S' = 2S$.

V druhém případě dostaneme obdélník o stranách $a = 3$, $b = 35$ s obsahem $S = 105$. Nový obdélník pak má strany $a' = 7$, $b' = 30$ a obsah $S' = 210$. Opět je $S' = 2S$.

KATEGORIE Z5

Z5–I–1

Housenka Leona spadla doprostřed čtvercové sítě. Rozhodla se, že poleze „do spirály" tak, jak je naznačeno na obrázku; na žádném čtverečku nebude dvakrát a žádný čtvereček nevynechá.



Z prvního čtverečku na druhý lezla směrem na východ, z druhého na třetí směrem na sever, ze třetího na čtvrtý směrem na západ, ze čtvrtého na pátý rovněž na západ, z pátého na šestý na jih… Kterým směrem lezla z 81. na 82. čtvereček? (*M. Petrová*)

Z5–I–2

Míša si z papíru vystřihla dva stejné čtverce, jeden obdélník o rozměrech $10\,\text{cm} \times 24\,\text{cm}$ a ještě jeden obdélník. Jaké rozměry mohl mít tento obdélník, pokud šlo ze všech čtyř útvarů složit čtverec, aniž by se jednotlivé díly překrývaly? Takových obdélníků lze nalézt několik, uveď alespoň čtyři. (*L. Šimůnek*)

Z5–I–3

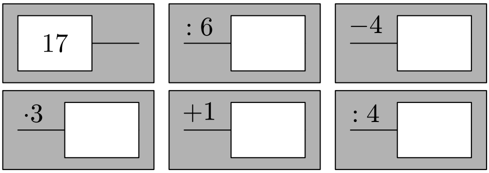
Vyřeš následující algebrogram a najdi všechna řešení. Stejná písmena nahraď stejnými číslicemi, různá různými.

$$\begin{array}{r} OSEL \\ SEL \\ EL \\ L \\ \hline 1\,0\,0\,3\,4 \end{array}$$

(*M. Volfová*)

Z5–I–4

Nina dostala od paní učitelky následující kartičky:



Má z nich všech sestavit příklad pro své spolužáky. Pomoz Nině a sestav jeden takový příklad tak, aby každé dělení vyšlo beze zbytku. Jaký bude výsledek? (*M. Petrová*)

Z5–I–5

Naše tři třídy, celkem 84 žáků, šly do kina. Lístek sice stál 50 Kč, ale každý 12. žák měl poloviční slevu a každý 35. vstup zdarma. Kolik stálo vstupné pro všechny žáky? (*M. Volfová*)

Z5–I–6

Kluci našli starý plán minového pole, viz obrázek. Čísla jsou na polích, kde žádné miny nejsou, a udávají počet zaminovaných sousedících polí. Urči, kolik je v poli celkem min a kde jsou. (Pole sousedí tehdy, mají-li společný vrchol nebo stranu.)

1		2		2
	3		3	
3				3
	2			
			2	

(*M. Volfová*)

KATEGORIE Z6

Z6–I–1

Jeníček s Mařenkou chodí k babičce, která má cukrárnu a prodává perníky. Oba dva jí samozřejmě pomáhají, hlavně se zdobením. Za dobu, kdy babička ozdobí pět perníků, ozdobí Mařenka tři a Jeníček dva. Při poslední návštěvě ozdobili všichni tři dohromady pět plných táců. Mařenka s babičkou zdobily po celou dobu, Jeníček kromě zdobení rovnal perníky po dvanácti na jeden tác a odnášel je do spíže. Všichni tři ve stejnou dobu začali i skončili.

1. Kolik perníčků ozdobil Jeníček?
2. Jak dlouho jim celá práce trvala, když babička ozdobí jeden perníček za 4 minuty?
3. Jak dlouho pomáhal Jeníček zdobit? (*M. Petrová*)

Z6–I–2

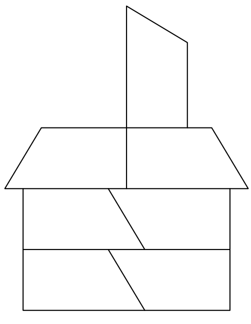
Čtyřmístný PIN kód Rastislavova mobilu je zajímavý:

- jednotlivé číslice tvoří prvočísla,
- 1. a 2. číslice v tomto pořadí vytvoří prvočíslo,
- 2. a 3. číslice v tomto pořadí vytvoří prvočíslo,
- 3. a 4. číslice v tomto pořadí vytvoří prvočíslo.

Rastislav zapomněl svůj PIN kód, ale pamatuje si všechny výše uvedené vlastnosti a snaží se zaktivovat vypnutý mobil. Která čísla by měl vyzkoušet? (*M. Petrová*)

Z6–I–3

Na následujícím obrázku je útvar složený ze sedmi stejných čtyřúhelníkových dílků stavebnice. Jaký je obvod tohoto útvaru, jestliže obvod jednoho čtyřúhelníkového dílku je 17 cm? (*K. Pazourek*)



Z6–I–4

Tatínek se rozhodl, že bude dávat svému synovi Mojmírovi vždy jedenkrát za měsíc kapesné. První kapesné dostal Mojmír v lednu. Tatínek každý měsíc kapesné zvyšoval vždy o 4 Kč. Kdyby Mojmír neutrácel, měl by po dvanáctém kapesném před Vánocemi 900 Kč. Kolik Kč dostal Mojmír při prvním kapesném v lednu? (*L. Hozová*)

Z6–I–5

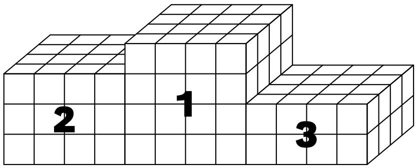
Doplňte místo hvězdiček číslice tak, aby součet výsledků následujících dvou příkladů byl 5 842:

$$\begin{array}{r} *2*7 \\ 3*4* \\ \hline 4*00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2*9* \\ -\,*2*4 \\ \hline *54* \end{array}$$

(*M. Dillingerová*)

Z6–I–6

Na školní olympiádu vytvořili žáci 6.B stupně vítězů z dřevěných krychlí, viz obrázek. Kolik krychlí celkem použili?



Sestavené stupně natřeli po celém povrchu (kromě podstavy) na bílo a po vyhlášení výsledků svůj výtvor rozebrali. Kolik krychlí mělo 6, kolik 5, 4, 3, 2, 1 či žádnou stěnu bílou? (*M. Dillingerová, M. Volfová*)

KATEGORIE Z7

Z7–I–1

Do prodejny vína se v noci vloupal kocour. Vyskočil na polici, na níž byly v dlouhé řadě vyrovnány lahve s vínem — první třetina lahví zkraje stála po 160 Kč, následující třetina lahví stála po 130 Kč a poslední třetina po 100 Kč. Nejprve kocour shodil na zem lahev za 160 Kč, která stála úplně na začátku řady, a pak postupoval dále a shazoval bez vynechání jednu lahev za druhou. Než ho to přestalo bavit, srazil 25 lahví a ty se všechny rozbily. Ráno majitel zalitoval, že kocour nezačal se svým řáděním na druhém okraji police. I kdyby totiž rozbil stejný počet lahví, byla by škoda o 660 Kč menší. Kolik lahví bylo původně na polici? (*L. Šimůnek*)

Z7–I–2

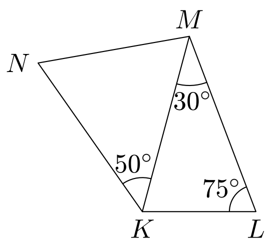
Na tabuli jsou napsaná tři přirozená čísla a, b, c, pro která platí:

- největší společný dělitel čísel a, b je 15,
- největší společný dělitel čísel b, c je 6,
- součin čísel b, c je 1 800,
- nejmenší společný násobek čísel a, b je 3 150. Která to jsou čísla?

(*L. Šimůnek*)

Z7–I–3

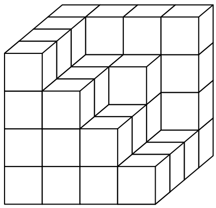
Ve čtyřúhelníku $KLMN$ známe vyznačené úhly a víme, že platí $|KN| = |LM|$. Jaká je velikost úhlu KNM?



(*L. Hozová*)

Z7–I–4

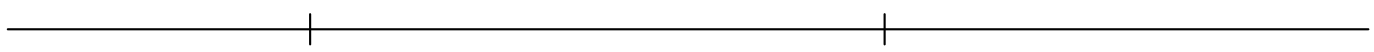
Krychle byla složena z 64 krychliček o hraně 2 cm. Pak bylo několik krychliček z viditelné strany odebráno, viz obrázek.



1. Jaký je objem a jaký povrch získaného tělesa?
2. Těleso bylo po celém povrchu natřeno červeně, pak rozebráno na původní krychličky. Kolik z nich mělo 6, kolik 5, 4, 3, 2, 1 či žádnou stěnu červenou? (*M. Volfová*)

Z7–I–5

Na číselné ose jsou znázorněna čísla $12x$ a $-4x$. Znázorni na této ose nulu a číslo x.



(*M. Petrová*)

Z7–I–6

Doplňte místo hvězdiček číslice tak, aby součet výsledků následujících dvou příkladů byl 5 842:

$$\begin{array}{r} *2*7 \\ 3*4* \\ \hline 4*0* \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2*9* \\ -*254 \\ \hline *5** \end{array}$$

Úloha má více řešení, určete alespoň dvě. (*M. Dillingerová*)

KATEGORIE Z8

Z8–I–1

Napište číslo 75 jako součet několika po sobě bezprostředně jdoucích přirozených čísel. Najděte aspoň čtyři řešení. (*M. Volfová*)

Z8–I–2

Tři kamarádky se sešly na chalupě a vyrazily na houby. Našly celkem 55 hřibů. Po návratu si udělaly smaženici, rozdělily ji na čtyři stejné porce a pozvaly na ni kamaráda Pepu. Líba dala na smaženici šest ze svých hřibů, Maruška osm a Šárka pět. Každé pak zbyl stejný počet hřibů. Pepa jim daroval bonboniéru, kde bylo 38 bonbónů, a řekl, že se mají spravedlivě rozdělit podle toho, jak přispěly na jeho jídlo.

1. Kolik hřibů našla každá?
2. Jak se měly podle Pepy podělit? (*M. Volfová*)

Z8–I–3

Sedadla v divadelním sálu jsou rozdělena do tří kategorií podle jejich vzdálenosti od jeviště. „I. místa“ jsou nejblíže jevišti, tvoří dvě pětiny kapacity sálu a prodávají se za 220 Kč. „II. místa“ tvoří další dvě pětiny sálu a prodávají se za 200 Kč. Zbývající „III. místa“ se prodávají za 180 Kč. Před zahájením předprodeje na slavnostní premiéru bylo rozdáno 150 vstupenek zdarma zvaným hostům. Vstupenky byly rozdávány postupně od předních míst sálu dozadu. Všechny ostatní vstupenky pak byly prodány. Kdyby se však volné vstupenky rozdávaly postupně od zadních míst dopředu, byla by tržba o 4 320 Kč větší. Kolik míst bylo v sálu? (*L. Šimůnek*)

Z8–I–4

Dostali jsme krychli, která měla délku hrany vyjádřenou v centimetrech celým číslem. Všechny její stěny jsme obarvili na červeno a poté jsme ji rozřezali beze zbytku na krychličky o hraně 1 cm.

- Lukáš tvrdí, že krychliček se dvěma obarvenými stěnami je desetkrát více než těch se třemi obarvenými stěnami.
- Martina říká, že krychliček se dvěma obarvenými stěnami je patnáctkrát více než těch se třemi obarvenými stěnami.

Pravdu má však pouze jeden — kdo? A kolik měřila hrana původní krychle? (*L. Šimůnek*)

Z8–I–5

Ze čtverce o straně 6 cm odřízneme od každého vrcholu shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky tak, aby se obsah čtverce zmenšil o 32 %. Jakou velikost mají odvěsny? (*M. Krejčová*)

Z8–I–6

Ve dvou místnostech vzdělávacího centra se konaly přednášky. Průměrný věk osmi lidí přítomných v první místnosti byl 20 let, průměrný věk dvanácti lidí ve druhé místnosti byl 45 let. V průběhu přednášky odešel jeden účastník a tím se průměrný věk všech osob v obou místnostech zvýšil o jeden rok. Kolik let bylo účastníkovi, který odešel? (*L. Hozová*)

KATEGORIE Z9

Z9–I–1

Dostal jsem zadána dvě přirozená čísla. Poté jsem je obě zaokrouhlil na desítky. Určete, která čísla jsem měl zadána, pokud víte, že:

- podíl zaokrouhlených čísel je stejný jako podíl čísel původních,
- součin zaokrouhlených čísel je o 295 větší než součin původních čísel,
- součet zaokrouhlených čísel je o 6 větší než součet původních čísel.

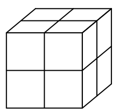
(*L. Šimůnek*)

Z9–I–2

Pat a Mat byli na výletě. Vyšli ráno po osmé hodině, kdy velká a malá ručička na Patových hodinkách ležely v opačných polopřímkách. V opačných polopřímkách byly ručičky Patových hodinek, i když se oba přátelé před polednem vrátili. Mat dobu výletu měřil na stopkách. Určete i vy s přesností na sekundy, jak dlouho trvala cesta. Předpokládejte, že Patovy hodinky a Matovy stopky šly přesně. (*M. Volfová*)

Z9–I–3

Na obrázku je krychle o hraně 2 cm tvořená osmi krychličkami s hranou 1 cm. Osm stěn krychliček je obarveno černě, ostatní jsou bílé. Přitom z nich lze složit krychli, jejíž povrch je bílý. Kolika způsoby mohou být krychličky obarveny? Předpokládejte, že stejně obarvené krychličky nedokážeme odlišit, mohou se tedy zaměnit.



(*K. Pazourek*)

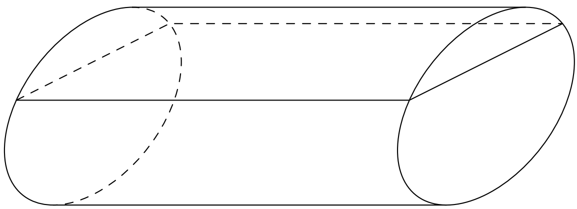
Z9–I–4

Adam a Eva dostali košík, ve kterém bylo 31 jablek. První den snědla Eva tři čtvrtiny toho, co snědl Adam. Druhý den snědla Eva dvě třetiny toho, co snědl týž den Adam. Druhého dne večer byl košík prázdný. Kolik jablek snědla z košíku Eva? (Adam i Eva jablka jedí celá a nedělí se o ně.)

(*L. Hozová*)

Z9–I–5

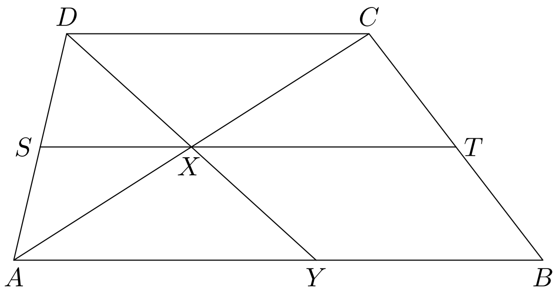
Řidič převáží mléko v cisterně tvaru válce. Průměr podstavy je 180 cm, délka cisterny je 4 m. Kolik hl mléka je v cisterně, jestliže je naplněna do tří čtvrtin průměru?



(*M. Krejčová*)

Z9–I–6

V lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD délky 7 cm a 4 cm jsou body S a T středy stran AD a BC, viz obrázek. Bod X je průsečík úseček AC a ST, bod Y je průsečík úsečky AB a přímky DX. Obsah čtyřúhelníku $AYCD$ je $12\,\mathrm{cm}^2$. Vypočtěte obsah lichoběžníku $ABCD$.



(*M. Dillingerová*)