I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Jeníček s Mařenkou chodí k babičce, která má cukrárnu a prodává perníky. Oba dva jí samozřejmě pomáhají, hlavně se zdobením. Za dobu, kdy babička ozdobí pět perníků, ozdobí Mařenka tři a Jeníček dva. Při poslední návštěvě ozdobili všichni tři dohromady pět plných táců. Mařenka s babičkou zdobily po celou dobu, Jeníček kromě zdobení rovnal perníky po dvanácti na jeden tác a odnášel je do spíže. Všichni tři ve stejnou dobu začali i skončili.

1. Kolik perníčků ozdobil Jeníček?
2. Jak dlouho jim celá práce trvala, když babička ozdobí jeden perníček za 4 minuty?
3. Jak dlouho pomáhal Jeníček zdobit?

(*M. Petrová*)

Možné řešení. Nejprve si zjistíme, kolik perníčků ozdobili dohromady. Bylo to 5 táců po dvanácti perníčkách, tedy 60 perníčků ($5 \cdot 12 = 60$).

Kdyby si všichni tři v jeden okamžik vzali perníček a začali ho zdobit, pak si za uvedených podmínek všichni tři zase najednou vezmou perníček až ve chvíli, kdy babička ozdobí pátý, Mařenka třetí a Jeníček druhý, dříve ne. Dokonce ani dva z nich si nevezmou perníček ve stejnou chvíli před uplynutím uvedené doby. Tento časový úsek si pojmenujeme jako jeden „cyklus“. Počet cyklů tedy musí být celé číslo (babička skončila s Mařenkou ve stejnou chvíli).

Nejprve si představíme, že Jeníček se věnoval pouze zdobení a s ničím dalším nepomáhal. Pak by za jeden cyklus všichni tři dohromady ozdobili 10 perníčků. K ozdobení šedesáti perníčků by tedy potřebovali přesně 6 cyklů ($60 : 10 = 6$). Protože ale Jeníček nezdobil celých 6 cyklů (rovnal také perníčky na tácy a ty pak odnášel), musela babička s Mařenkou zdobit alespoň 7 cyklů.

Kdyby pracovaly 8 cyklů, babička by ozdobila 40 perníčků ($8 \cdot 5 = 40$) a Mařenka by ozdobila 24 perníčků ($8 \cdot 3 = 24$). Dohromady by ozdobily 64 perníčků, tedy více než měly. Protože musely dokončit cyklus (jedna by jinak skončila dřív než druhá), nemohlo být těchto cyklů 8 nebo více.

To znamená, že babička s Mařenkou pracovaly právě 7 cyklů. Babička tedy ozdobila 35 perníčků ($7 \cdot 5 = 35$) a Mařenka ozdobila 21 perníčků ($7 \cdot 3 = 21$). Jeníček ozdobil 4 perníčky ($60 - 35 - 21 = 4$).

Jestliže babička ozdobí jeden perníček za 4 minuty, jeden cyklus trvá 20 minut ($4 \cdot 5 = 20$). Celá práce jim tedy trvala 140 minut ($7 \cdot 20 = 140$), tj. 2 hodiny 20 minut.

Protože Jeníček ozdobil 4 perníčky, zdobil celé dva cykly ($4 : 2 = 2$), tj. 40 minut ($2 \cdot 20 = 40$).

Jiné řešení. Úlohu lze řešit i tak, že „vynecháme“ Jeníčkovo zdobení. Babička s Mařenkou ozdobí za jeden cyklus dohromady 8 perníčků, takže cyklů bude nejvýše 7 ($60 : 8 = 7$, zbytek 4). Zbylé 4 perníčky ozdobí Jeníček. Kdyby bylo cyklů pouze 6, zdobil by Jeníček po celou dobu a nemohl by např. odnášet tácy. Méně cyklů samozřejmě být nemohlo. Dál už je vše stejné.

Z6–I–2

Čtyřmístný PIN kód Rastislavova mobilu je zajímavý:

- jednotlivé číslice tvoří prvočísla,
- 1. a 2. číslice v tomto pořadí vytvoří prvočíslo,
- 2. a 3. číslice v tomto pořadí vytvoří prvočíslo,
- 3. a 4. číslice v tomto pořadí vytvoří prvočíslo.

Rastislav zapomněl svůj PIN kód, ale pamatuje si všechny výše uvedené vlastnosti a snaží se zaktivovat vypnutý mobil. Která čísla by měl vyzkoušet? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Nejprve si uvědomíme, že všechna jednomístná prvočísla jsou 2, 3, 5 a 7. Dále si zjistíme, že všechna dvojmístná prvočísla, která lze sestavit z těchto číslic, jsou

23, 37, 53, 73.

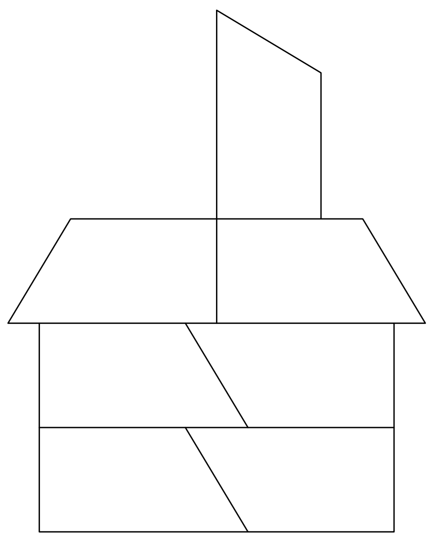
Když vyjádříme Rastislavův PIN jako $ABCD$, ze zadání víme, že AB, BC a CD musí být prvočísla. (Pozor, nikde není řečeno, že A, B, C a D jsou navzájem různé číslice!) Za A postupně dosadíme číslice 2, 3, 5, 7 a budeme zjišťovat, zda a jakými číslicemi lze nahradit B, C, D, abychom vyhověli uvedeným požadavkům. Vše je shrnuto v následující tabulce:

A	B	C	D	PIN
2	3	7	3	2373
3	7	3	7	3737
5	3	7	3	5373
7	3	7	3	7373

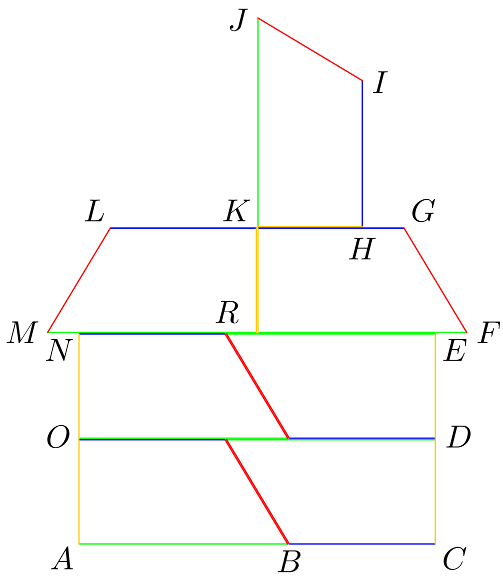
Rastislav by měl vyzkoušet následující čtyři čísla: 2373, 3737, 5373 a 7373.

Z6–I–3

Na následujícím obrázku je útvar složený ze sedmi stejných čtyřúhelníkových dílků stavebnice. Jaký je obvod tohoto útvaru, jestliže obvod jednoho čtyřúhelníkového dílku je 17 cm? (*K. Pazourek*)



Možné řešení. Obarvěme jednotlivé strany dílků následovně: nejdelší stranu zeleně, s ní rovnoběžnou stranu modře, na ně kolmou stranu žlutě a zbývající stranu červeně; délky odpovídajících stran budeme značit zkráceně z, m, $ž$ a $č$. Dále označme vybrané „vrcholy" jednotlivých dílků jako na následujícím obrázku:



Obvod obrazce je tvořen:

- 3 modrými úsečkami BC, HI a KL, jejichž délky jsou m,
- 2 zelenými úsečkami AB a JK, jejichž délky jsou z,
- 4 žlutými úsečkami CD, DE, NO a OA, jejichž délky jsou $ž$,
- 3 červenými úsečkami FG, IJ a LM, jejichž délky jsou $č$,
- 2 shodnými úsečkami EF a MN a 1 úsečkou GH, jejichž délky zatím neznáme.

Délky úseček MN a EF spolu se zelenou stranou ER a modrou stranou RN dávají úsečku MF, která je tvořena dvěma zelenými stranami. Jinými slovy,

$$|EF| + |MN| = z + z - (z + m) = z - m.$$

Délku modré strany KG můžeme vyjádřit jako součet délek žluté strany KH a úsečky GH, tedy

$$|GH| = m - ž.$$

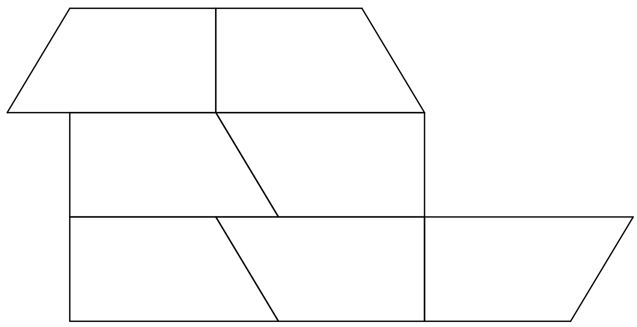
Dohromady, obvod obrazce je

$$3m + 2z + 4ž + 3č + (z - m) + (m - ž) = 3m + 3z + 3ž + 3č = 3(m + z + ž + č).$$

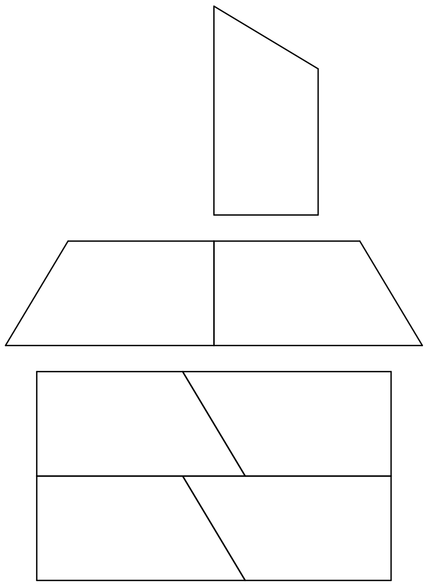
Dostali jsme tak trojnásobek obvodu jednoho čtyřúhelníkového dílku, tedy obvod celého obrazce je roven

$$3 \cdot 17 = 51\,(\mathrm{cm}).$$

Poznámka. Pokud nejprve posuneme některé části obrazce tak, aby obvod zůstal zachován, mohou se některé úvahy zjednodušit, viz např. následující obrázek.



Jiné řešení. Oddělme „komín“ od „střechy“ a „střechu“ od „zdí“ tak, jak ukazuje obrázek.



Součet obvodů těchto tří útvarů určíme snadno (použijeme značení m, z, $ž$, $č$ jako výše):

$$5m + 5z + 5ž + 3č.$$

Uvedený součet je oproti obvodu původního útvaru větší o dvě délky $ž$, což způsobilo oddělení „komínu“, a o dva součty délek $m + z$, což způsobilo oddělení „zdí“. Obvod původního útvaru je tedy

$$(5m + 5z + 5ž + 3č) - ž - ž - (m + z) - (m + z) = 3m + 3z + 3ž + 3č.$$

Vidíme, že původní útvar má třikrát větší obvod než čtyřúhelníkový dílek, tj. $3 \cdot 17 = 51\,(\mathrm{cm})$.

Z6–I–4

Tatínek se rozhodl, že bude dávat svému synovi Mojmírovi vždy jedenkrát za měsíc kapesné. První kapesné dostal Mojmír v lednu. Tatínek každý měsíc kapesné zvyšoval vždy o 4 Kč. Kdyby Mojmír neutrácel, měl by po dvanáctém kapesném před Vánocemi 900 Kč. Kolik Kč dostal Mojmír při prvním kapesném v lednu? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Označme výši lednového kapesného v Kč jako x. V únoru Mojmír dostal $x+4$, v březnu $x+8$, v dubnu $x+12$, $\ldots$, v prosinci $x+44$. Podle zadání víme, že

$$12x + (4+8+12+16+20+24+28+32+36+40+44) = 900.$$

Po úpravách dostáváme:

$$\begin{aligned} 12x + 264 &= 900, \\ 12x &= 636, \\ x &= 53. \end{aligned}$$

Mojmír v lednu dostal 53 Kč.

Z6–I–5

Doplňte místo hvězdiček číslice tak, aby součet výsledků následujících dvou příkladů byl 5 842:

$$\begin{array}{r} \ast 2 \ast 7 \\ 3 \ast 4 \ast \\ \hline 4 \ast 0 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \ast 9 \ast \\ - \ast 2 \ast 4 \\ \hline \ast 5 4 \ast \end{array}$$

(*M. Dillingerová*)

Možné řešení. Doplňujeme postupně jednotlivé číslice; některé lze doplnit nezávisle na ostatním přímo v prvním příkladě, některé ve druhém, číslice pod čarou doplňujeme podle informace o součtu výsledků obou příkladů. Postupovat můžeme např. následujícím způsobem:

$$\begin{array}{r} \ast 2 \ast 7 \\ 3 \ast 4 \mathbf{3} \\ \hline 4 \ast 0 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \ast 9 \ast \\ - \ast 2 \ast 4 \\ \hline \ast 5 4 \ast \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \ast 2 \mathbf{5} 7 \\ 3 \ast 4 3 \\ \hline 4 \ast 0 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \ast 9 \ast \\ - \ast 2 \ast 4 \\ \hline \ast 5 4 \ast \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \ast 2 5 7 \\ 3 \ast 4 3 \\ \hline 4 \ast 0 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \ast 9 \ast \\ - \ast 2 \ast 4 \\ \hline \ast 5 4 \mathbf{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \ast 2 5 7 \\ 3 \ast 4 3 \\ \hline 4 \ast 0 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \ast 9 \mathbf{6} \\ - \ast 2 \ast 4 \\ \hline \ast 5 4 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} *257 \\ 3*43 \\ \hline 4*00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2*96 \\ -*2\mathbf{5}4 \\ \hline *542 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} *257 \\ 3*43 \\ \hline 4*00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\mathbf{7}96 \\ -*254 \\ \hline *542 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} *257 \\ 3*43 \\ \hline 4\mathbf{3}00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2796 \\ -*254 \\ \hline *542 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} *257 \\ 3\mathbf{0}43 \\ \hline 4300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2796 \\ -*254 \\ \hline *542 \end{array}$$

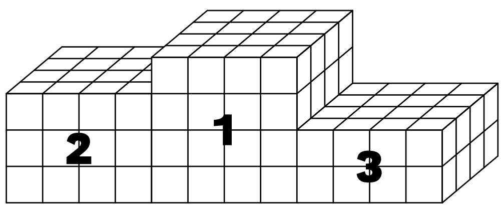
$$\begin{array}{r} \mathbf{1}257 \\ 3043 \\ \hline 4300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2796 \\ -*254 \\ \hline *542 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257 \\ 3043 \\ \hline 4300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2796 \\ -*254 \\ \hline \mathbf{1}542 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257 \\ 3043 \\ \hline 4300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2796 \\ -\mathbf{1}254 \\ \hline 1542 \end{array}$$

Z6–I–6

Na školní olympiádu vytvořili žáci 6.B stupně vítězů z dřevěných krychlí, viz obrázek. Kolik krychlí celkem použili?



Sestavené stupně natřeli po celém povrchu (kromě podstavy) na bílo a po vyhlášení výsledků svůj výtvor rozebrali. Kolik krychlí mělo 6, kolik 5, 4, 3, 2, 1 či žádnou stěnu bílou? (*M. Dillingerová, M. Volfová*)

Možné řešení. Na druhý stupeň je celkem potřeba $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ krychlí, na první $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ a na třetí $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$. Žáci tedy celkem použili

$$48 + 64 + 32 = 144$$

krychlí.

Krychlí, které nemají žádnou stěnu bílou, je v první (nejspodnější) vrstvě $10 \cdot 2 = 20$, ve druhé $7 \cdot 2 = 14$, ve třetí $3 \cdot 2 = 6$ a ve čtvrté vrstvě žádná; celkem tedy

$$20 + 14 + 6 = 40.$$

Krychlí, které mají právě jednu stěnu bílou, je v přední/zadní stěně $10 + 7 + 3 = 20$, v bočních stěnách $4+2+2 = 8$ (počítáno zleva doprava) a v horních stěnách $6+4+6 = 16$; celkem tedy

$$20 \cdot 2 + 8 + 16 = 64.$$

Krychlí, které mají právě dvě stěny bílé, je na podélných hranách $2 \cdot (3 + 2 + 3) = 16$, na příčných $4 \cdot 2 = 8$ a na svislých $4 + 2 + 2 = 8$; celkem tedy

$$16 + 8 + 8 = 32.$$

Krychlí, které mají tři stěny bílé, je právě 8 a žádná krychle nemá obarveno více než tři stěny.

Pro kontrolu ještě porovnáme výsledky z obou částí diskuse:

$$144 = 40 + 64 + 32 + 8.$$

Poznámka. Pro jiný systém v řešení podobného problému viz úlohu Z7–I–4.