59. ročník Matematické olympiády

I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Do prodejny vína se v noci vloupal kocour. Vyskočil na polici, na níž byly v dlouhé řadě vyrovnány lahve s vínem — první třetina lahví zkraje stála po 160 Kč, následující třetina lahví stála po 130 Kč a poslední třetina po 100 Kč. Nejprve kocour shodil na zem lahev za 160 Kč, která stála úplně na začátku řady, a pak postupoval dále a shazoval bez vynechání jednu lahev za druhou. Než ho to přestalo bavit, srazil 25 lahví a ty se všechny rozbily. Ráno majitel zalitoval, že kocour nezačal se svým řáděním na druhém okraji police. I kdyby totiž rozbil stejný počet lahví, byla by škoda o 660 Kč menší. Kolik lahví bylo původně na polici? (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. V zadání není uvedeno, ve které třetině řady kocour přestal shazovat lahve. Budeme postupně uvažovat o každé třetině jako o té, kde kocour skončil, a vždy dojdeme k závěru, zda mohl skončit právě v ní či nikoli.

Pokud přestal v první třetině řady, škoda by při shazování od opačného konce byla o $25 \cdot 60 = 1\,500$ (Kč) menší, protože rozdíl v ceně nejdražší a nejlevnější lahve vína je 60 Kč. V zadání úlohy je rozdíl škod jiný, a sice 660 Kč. Kocour tedy neskončil v první třetině řady.

Pokud shodil více než jednu třetinu, avšak maximálně dvě třetiny řady, rozbil všechny nejdražší lahve a možná několik středně drahých. Při postupu z opačné strany by zlikvidoval stejný počet středně drahých a místo všech nejdražších všechny nejlevnější. Rozdíl škod tedy odpovídá počtu lahví tvořících třetinu řady vynásobenému 60 Kč. Třetinu řady by tedy tvořilo $660 : 60 = 11$ lahví a lahví celkem by bylo $3 \cdot 11 = 33$. Kocour dle zadání shodil 25 lahví, což je více než dvě třetiny z celkových 33 lahví. Podmínka, kterou uvádíme na začátku tohoto odstavce, není splněna, a kocour tudíž nemohl skončit ve druhé třetině řady.

Pokud shodil více než dvě třetiny lahví, zachovalo se jen několik nejlevnějších. Shazoval-li by od opačného konce, zůstalo by nedotčeno stejně nejdražších lahví. Rozdíl škod odpovídá počtu nedotčených lahví vynásobenému 60 Kč. Nedotčených lahví by tedy muselo být $660 : 60 = 11$ a lahví celkem $11 + 25 = 36$. To by znamenalo, že kocour shodil všech 12 nejdražších lahví ($36 : 3 = 12$), všech 12 středně drahých a jednu nejlevnější. Takové řešení vyhovuje.

Na polici bylo původně 36 lahví.

Z7–I–2

Na tabuli jsou napsaná tři přirozená čísla a, b, c, pro která platí:

- největší společný dělitel čísel a, b je 15,
- největší společný dělitel čísel b, c je 6,
- součin čísel b, c je $1\,800$,
- nejmenší společný násobek čísel a, b je $3\,150$.

Která to jsou čísla? (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Do tabulky budeme postupně zapisovat jednotlivé prvočíselné činitele rozkladů čísel a, b, c.

Podle první podmínky je největší společný dělitel čísel a a b roven $15 = 3 \cdot 5$. To znamená, že jak v řádku a, tak v řádku b musí být činitelé 3 a 5 a žádný další činitel nemůže být v obou řádcích zároveň. Po uplatnění první a jí podobné druhé podmínky vypadá tabulka takto:

a	$3 \cdot 5 \ldots$
b	$2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots$
c	$2 \cdot 3 \ldots$

Podle třetí podmínky platí $b \cdot c = 1\,800 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$. To znamená, že v řádcích b a c musí být těchto 7 činitelů a žádný navíc. Podle čtvrté podmínky je nejmenší společný násobek čísel a a b roven $3\,150 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$. Pro řádky a a b to znamená, že:

- v jednom z nich musí být právě jednou činitel 2 a ve druhém maximálně jednou (totéž platí i pro činitel 7),
- v jednom z nich musí být právě dvakrát činitel 3 a ve druhém maximálně dvakrát (totéž platí i pro činitel 5),
- žádný jiný činitel tam být nemůže.

Podle třetí podmínky musíme do řádků b a c doplnit už jen dva činitele: 5 a 2. Činitel 5 nemůže být v řádku c, protože pak by čísla b a c měla společný dělitel $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, což odporuje druhé podmínce. Činitel 2 nemůže být v řádku b, protože to by odporovalo čtvrté podmínce o nejmenším společném násobku čísel a a b. Po této úvaze máme řádky b a c zcela zaplněny:

a	$3 \cdot 5 \ldots$
b	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
c	$2 \cdot 2 \cdot 3$

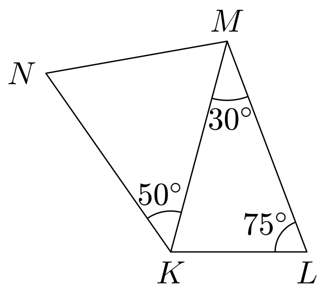
Podle čtvrté podmínky mohou být v řádku a pouze činitelé 2, 3, 5, 7. Činitele 2 a 5 tam nemůžeme doplnit, vznikl by totiž společný dělitel čísel a a b odporující první podmínce. Činitele 3 a 7 do řádku a doplnit musíme kvůli čtvrté podmínce:

a	$3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 315$
b	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 150$
c	$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

Neznámé a, b, c jsou po řadě rovny číslům 315, 150, 12.

Z7–I–3

Ve čtyřúhelníku $KLMN$ známe vyznačené úhly a víme, že platí $|KN| = |LM|$. Jaká je velikost úhlu KNM?



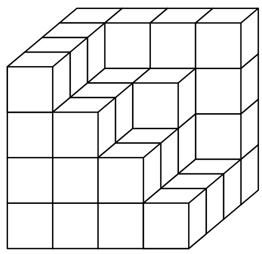
(*L. Hozová*)

Možné řešení. Protože součet vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku je 180°, velikost úhlu LKM je $180° - 75° - 30° = 75°$. Odtud plyne, že trojúhelník KLM je rovnoramenný, tj. $|LM| = |KM|$. Podle zadání je $|LM| = |KN|$, tudíž $|KM| = |KN|$ a trojúhelník KMN je také rovnoramenný. Velikost úhlu KNM je tedy rovna

$$(180° - 50°) : 2 = 65°.$$

Z7–I–4

Krychle byla složena z 64 krychliček o hraně 2 cm. Pak bylo několik krychliček z viditelné strany odebráno, viz obrázek.



1. Jaký je objem a jaký povrch získaného tělesa?
2. Těleso bylo po celém povrchu natřeno červeně, pak rozebráno na původní krychličky. Kolik z nich mělo 6, kolik 5, 4, 3, 2, 1 či žádnou stěnu červenou?

(*M. Volfová*)

Možné řešení. 1. Povrch tělesa je stejný jako povrch původní krychle, tj.

$$6 \cdot 8 \cdot 8 = 384 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Z původní krychle bylo odebráno $3 + 5 + 9 = 17$ krychliček (počítáno po vrstvách zdola) a objem původní krychle byl $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ (cm^3). Objem získaného tělesa je tedy

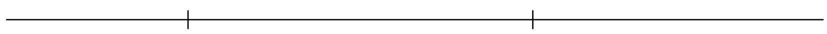
$$512 - 17 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 512 - 136 = 376 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

2. Žádná z krychliček nemá obarveno 5 a více stěn, ostatní případy jsou diskutovány v následující tabulce. V jednotlivých vrstvách (číslováno zdola nahoru) počítáme krychličky, jež mají 4, 3, 2, 1, resp. žádnou stěnu červenou. Odpověď je v posledním řádku, poslední sloupec doplňujeme pro kontrolu:

	4	3	2	1	0	celkem
1. vrstva	1	5	6	4	0	16
2. vrstva	0	2	3	6	2	13
3. vrstva	0	3	3	5	0	11
4. vrstva	2	5	0	0	0	7
celkem	**3**	**15**	**12**	**15**	**2**	47

Z7–I–5

Na číselné ose jsou znázorněna čísla $12x$ a $-4x$. Znázorni na této ose nulu a číslo x.



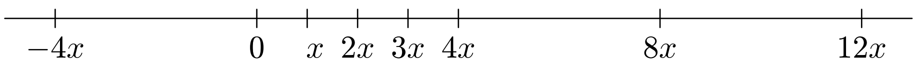
(*M. Petrová*)

Možné řešení. Nejprve je potřeba si uvědomit, kterému bodu odpovídá které číslo. Je zřejmé, že x nemůže být nula (pak by oba body splývaly). Je-li x kladné, potom levý bod znázorňuje číslo $-4x$ a pravý bod číslo $12x$. Je-li ale x záporné, pak je levý bod obrazem čísla $12x$ a pravý bod obrazem čísla $-4x$.

a) x kladné:

Vzdálenost čísel vyznačených na číselné ose je $16x$. Úsečku ohraničenou vyznačenými body rozdělíme na čtvrtiny. Každý ze čtyř úseků pak bude mít délku $4x$. To znamená, že (zleva doprava) postupně dostaneme obrazy čísel $-4x$, 0, $4x$, $8x$, $12x$. Nule tedy odpovídá druhý bod zleva z vyznačených pěti bodů.

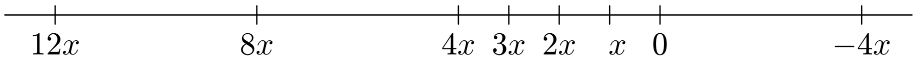
Nyní si budeme všímat úsečky, jejíž krajní body znázorňují čísla 0 a $4x$. Opět ji rozdělíme na čtvrtiny. Dostaneme tak po řadě (zleva doprava) obrazy čísel 0, x, $2x$, $3x$, $4x$. Číslo x je znázorněno druhým bodem zleva z těchto pěti bodů.



b) x záporné:

Postupujeme analogicky — celá situace je vlastně „zrcadlovým obrazem“ té předchozí. Rozdělením zadané úsečky na čtvrtiny dostaneme (zleva doprava) obrazy čísel $12x$, $8x$, $4x$, 0, $-4x$ a nule odpovídá čtvrtý bod zleva z těchto pěti bodů.

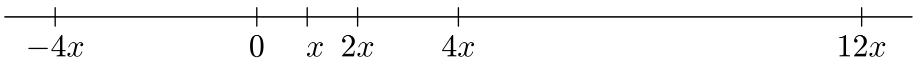
Úsečku, jejímiž krajními body jsou obrazy čísel $4x$ a 0, znovu rozdělíme na čtvrtiny. Dostaneme (zleva doprava) obrazy čísel $4x$, $3x$, $2x$, x, 0. Číslo x je znázorněno čtvrtým bodem zleva z této pětice bodů.



Jiné řešení. Jak nulu, tak číslo x lze nalézt mezi $-4x$ a $12x$ pouze půlením vhodných úseček na číselné ose. Využijeme toho, že aritmetickému průměru dvou čísel odpovídá střed příslušné úsečky:

- aritmetický průměr $-4x$ a $12x$ je $4x$,
- aritmetický průměr $-4x$ a $4x$ je 0,
- aritmetický průměr 0 a $4x$ je $2x$,
- aritmetický průměr 0 a $2x$ je x.

Tento postup znázorníme v případě a) pro x kladné:



Z7–I–6

Doplňte místo hvězdiček číslice tak, aby součet výsledků následujících dvou příkladů byl 5 842:

$$\begin{array}{r} \ast 2 \ast 7 \\ 3 \ast 4 \ast \\ \hline 4 \ast 0 \ast \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \ast 9 \ast \\ - \ast 2 5 4 \\ \hline \ast 5 \ast \ast \end{array}$$

Úloha má více řešení, určete alespoň dvě. (*M. Dillingerová*)

Možné řešení. Doplňujeme postupně jednotlivé číslice; některé lze doplnit nezávisle na ostatním přímo v prvním příkladě, některé ve druhém, číslice pod čarou doplňujeme podle informace o součtu výsledků obou příkladů. Postupovat můžeme např. následujícím způsobem:

$$\begin{array}{r} \ast 2 \ast 7 \\ 3 \ast 4 \ast \\ \hline 4 \ast 0 \ast \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \mathbf{7} 9 \ast \\ - \ast 2 5 4 \\ \hline \ast 5 \ast \ast \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \ast 2 \ast 7 \\ 3 \ast 4 \ast \\ \hline 4 \mathbf{3} 0 \ast \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 7 9 \ast \\ - \ast 2 5 4 \\ \hline \ast 5 \ast \ast \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \ast 2 \ast 7 \\ 3 \mathbf{0} 4 \ast \\ \hline 4 3 0 \ast \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 7 9 \ast \\ - \ast 2 5 4 \\ \hline \ast 5 \ast \ast \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{1} 2 \ast 7 \\ 3 0 4 \ast \\ \hline 4 3 0 \ast \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 7 9 \ast \\ - \ast 2 5 4 \\ \hline \ast 5 \ast \ast \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 2 \ast 7 \\ 3 0 4 \ast \\ \hline 4 3 0 \ast \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 7 9 \ast \\ - \ast 2 5 4 \\ \hline \mathbf{1} 5 \ast \ast \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12{*}7\\ 304{*}\\ \hline 430{*}\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r} 279{*}\\ -\mathbf{1}254\\ \hline 15{*}{*}\end{array}$$

Zde již nelze doplnit žádnou číslici jednoznačně. Na místě jednotek v kterémkoli zatím neznámém čísle může být číslice od 0 do 9 a libovolná volba na jednom takovém místě stačí k doplnění všech zbývajících číslic. Úloha tedy má nejvýše deset řešení, které již snadno odhalíme. Např. po doplnění 0 do výsledku prvního příkladu můžeme pokračovat takto:

$$\begin{array}{r} 12{*}7\\ 304\mathbf{3}\\ \hline 4300\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r} 279{*}\\ -1254\\ \hline 15{*}{*}\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12\mathbf{5}7\\ 304\mathbf{3}\\ \hline 4300\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r} 279{*}\\ -1254\\ \hline 15{*}{*}\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257\\ 3043\\ \hline 4300\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r} 279{*}\\ -1254\\ \hline 15{*}\mathbf{2}\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257\\ 3043\\ \hline 4300\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r} 279\mathbf{6}\\ -1254\\ \hline 15{*}2\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257\\ 3043\\ \hline 4300\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r} 2796\\ -1254\\ \hline 15\mathbf{4}2\end{array}$$

Kontrola ($4\,300+1\,542=5\,842$) nás ujistí, že jsme právě našli jedno z možných řešení. Tímto způsobem lze najít všechna řešení, kterých je právě sedm:

$$\begin{array}{r} 1257\\ 3043\\ \hline 4300\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r} 2796\\ -1254\\ \hline 1542\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257\\ 3044\\ \hline 4301\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r} 2795\\ -1254\\ \hline 1541\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257\\ 3045\\ \hline 4302\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r} 2794\\ -1254\\ \hline 1540\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257\\ 3046\\ \hline 4303\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r} 2793\\ -1254\\ \hline 1539\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257 \\ 3047 \\ \hline 4304 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2792 \\ -1254 \\ \hline 1538 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257 \\ 3048 \\ \hline 4305 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2791 \\ -1254 \\ \hline 1537 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257 \\ 3049 \\ \hline 4306 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2790 \\ -1254 \\ \hline 1536 \end{array}$$

Poznámka. Při doplnění např. 7 do výsledku prvního příkladu vede předchozí postup k následujícímu závěru:

$$\begin{array}{r} 1267 \\ 3040 \\ \hline 4307 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2799 \\ -1254 \\ \hline 1545 \end{array}$$

Toto však není řešení dané úlohy, protože $4\,307 + 1\,545 \neq 5\,842$. Ze stejného důvodu nezískáme další řešení ani po doplnění 8 a 9 na místo 7...