I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Napište číslo 75 jako součet několika po sobě bezprostředně jdoucích přirozených čísel. Najděte aspoň čtyři řešení. (*M. Volfová*)

Možné řešení. Chceme-li vyjádřit 75 požadovaným způsobem pomocí dvou sčítanců, hledáme přirozené číslo x tak, aby $75 = x + (x + 1) = 2x + 1$. Jediné takové číslo je $x = 37$, tudíž

$$75 = 37 + 38.$$

Podobně pro tři sčítance, hledáme přirozené řešení rovnice $75 = x+(x+1)+(x + 2) = 3x + 3$, jež je $x = 24$, tudíž

$$75 = 24 + 25 + 26.$$

Pomocí čtyř (podobně osmi, dvanácti, ...) sčítanců 75 takto vyjádřit nelze, neboť součet jakýchkoli čtyř (podobně osmi, dvanácti, ...) po sobě bezprostředně jdoucích přirozených čísel je vždy sudý.

Pět sčítanců odpovídá řešení rovnice $75 = x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4) = 5x+10$, jež je $x = 13$, tudíž

$$75 = 13 + 14 + 15 + 16 + 17.$$

Obdobným způsobem lze najít ještě následující řešení pomocí šesti, resp. desíti sčítanců:

$$75 = 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15,$$
$$75 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12.$$

Poznámka. Alternativní zápis pro tři sčítance může vypadat následovně: $75 = (y - 1) + y + (y + 1) = 3y$, odtud $y = 25$, což souhlasí s předchozím závěrem. Tento způsob zápisu je výhodný zejména pro liché počty sčítanců; např. 75 nelze zapsat požadovaným způsobem pomocí sedmi, resp. devíti sčítanců, protože 75 není dělitelné 7, resp. 9...

Z8–I–2

Tři kamarádky se sešly na chalupě a vyrazily na houby. Našly celkem 55 hřibů. Po návratu si udělaly smaženici, rozdělily ji na čtyři stejné porce a pozvaly na ni kamaráda Pepu. Líba dala na smaženici šest ze svých hřibů, Maruška osm a Šárka pět. Každé pak zbyl stejný počet hřibů. Pepa jim daroval bonboniéru, kde bylo 38 bonbonů, a řekl, že se mají spravedlivě rozdělit podle toho, jak přispěly na jeho jídlo.

1. Kolik hřibů našla každá?
2. Jak se měly podle Pepy podělit?

(*M. Volfová*)

Možné řešení. 1. Do smaženice kamarádky daly celkem $6 + 8 + 5 = 19$ hřibů, takže jim zůstalo $55 - 19 = 36$. Všechny pak měly stejně, každé tedy zbylo $36 : 3 = 12$ hřibů. Líba dala do smaženice 6 hřibů, našla tedy $12 + 6 = 18$ hřibů, Maruška dala 8, našla proto $12 + 8 = 20$ a Šárka dala 5, našla jich $12 + 5 = 17$.

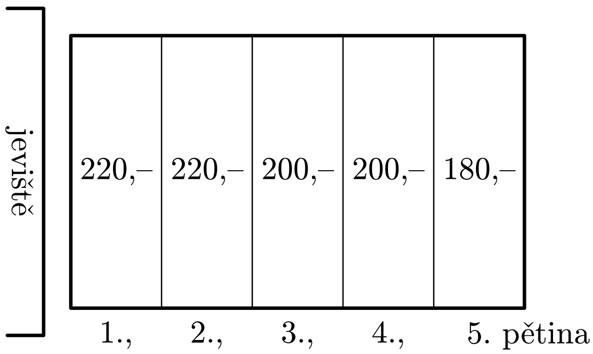
2. Každý snědl čtvrtinu smaženice, tzn. každý snědl $\frac{19}{4} = 4\frac{3}{4}$ hřibů. Líba dala do smaženice 6 hřibů (sama snědla $4\frac{3}{4}$), do Pepovy porce tedy přispěla množstvím $6 - 4\frac{3}{4} = 1\frac{1}{4}$, tj. $\frac{5}{4}$ hřibů. Maruška dala 8 hřibů, přispěla Pepovi $8 - 4\frac{3}{4} = 3\frac{1}{4} = \frac{13}{4}$ hřibů. Šárka dala 5 hřibů, přispěla Pepovi $5 - 4\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ hřibu.

Děvčata se měla podle Pepy podělit v poměru $\frac{5}{4} : \frac{13}{4} : \frac{1}{4}$. To je totéž jako poměr $5 : 13 : 1$ nebo též $10 : 26 : 2$, tedy celkem 38 dílů, což odpovídá právě 38 bonbónům v bonboniéře. Líba měla podle Pepy dostat 10 bonbonů, Maruška 26 a Šárka 2.

Z8–I–3

Sedadla v divadelním sálu jsou rozdělena do tří kategorií podle jejich vzdálenosti od jeviště. „I. místa“ jsou nejblíže jevišti, tvoří dvě pětiny kapacity sálu a prodávají se za 220 Kč. „II. místa“ tvoří další dvě pětiny sálu a prodávají se za 200 Kč. Zbývající „III. místa“ se prodávají za 180 Kč. Před zahájením předprodeje na slavnostní premiéru bylo rozdáno 150 vstupenek zdarma zvaným hostům. Vstupenky byly rozdávány postupně od předních míst sálu dozadu. Všechny ostatní vstupenky pak byly prodány. Kdyby se však volné vstupenky rozdávaly postupně od zadních míst dopředu, byla by tržba o 4 320 Kč větší. Kolik míst bylo v sálu? *(L. Šimůnek)*

Možné řešení. Pro výpočty je podstatné, v kolikáté pětině sálu končí úsek s volnými vstupenkami (viz obrázek). Řešení úlohy proto rozdělíme do pěti částí a v každé budeme pracovat s jiným předpokladem. Pro počet sedadel v jedné pětině sálu používáme neznámou p.



a) Předpokládáme, že 150 volných vstupenek tvořilo $\frac{1}{5}$ sálu nebo méně. Přesunem volných vstupenek do zadní části sálu by se získalo $150 \cdot 40 = 6\,000$ (Kč), což neodpovídá zadání.

b) Předpokládáme, že úsek s volnými vstupenkami končí v druhé pětině sálu, tedy že $p < 150 \leqq 2p$. Přesunem volných vstupenek z první pětiny do páté by se získalo $40p$ Kč. Ve druhé pětině sálu je $150 - p$ volných vstupenek a jejich přesunem do čtvrté pětiny by se získalo $20 \cdot (150 - p)$ Kč. Vypočítáme p:

$$\begin{aligned} 40p + 20 \cdot (150 - p) &= 4\,320, \\ 20p + 3\,000 &= 4\,320, \\ p &= 66. \end{aligned}$$

Vidíme, že předpokládaná nerovnost $150 \leqq 2p$ neplatí, a proto úsek s volnými vstupenkami nemůže končit ve druhé pětině sálu.

c) Předpokládáme, že úsek s volnými vstupenkami končí ve třetí pětině sálu, tedy že $2p < 150 \leqq 3p$. Přesunem volných vstupenek z první pětiny do páté by se získalo $40p$ Kč, ze druhé pětiny do čtvrté $20p$ Kč. Zbylých $150 - 2p$ volných vstupenek je ve třetí pětině sálu a ty by se přesunuly bez zisku opět do třetí pětiny. Vypočítáme p:

$$\begin{aligned} 40p + 20p + 0 \cdot (150 - 2p) &= 4\,320, \\ 60p &= 4\,320, \\ p &= 72. \end{aligned}$$

Vidíme, že předpokládaná nerovnost $2p < 150 \leqq 3p$ platí. Úsek s volnými vstupenkami tedy mohl končit ve třetí pětině sálu a počet míst v sále by pak byl $5p = 5 \cdot 72 = 360$.

d) Předpokládáme, že úsek s volnými vstupenkami končí ve čtvrté pětině sálu, tedy že $3p < 150 \leqq 4p$. Můžeme sestavit rovnici podobně jako v předchozích odstavcích nebo ukázat jinou úvahu: za vstupenky v páté pětině sálu se utržilo $180p$ Kč, vstupenek ve čtvrté pětině se prodalo $4p - 150$ a utržilo se za ně $200 \cdot (4p - 150)$ Kč. Pokud by se volné vstupenky rozdávaly od zadních řad, prodalo by se $5p - 150$ vstupenek a všechny by byly za 220 Kč. Rozdíl těchto dvou tržeb je 4 320 Kč, docházíme k takovéto rovnici:

$$\begin{aligned} 220 \cdot (5p - 150) - 180p - 200 \cdot (4p - 150) &= 4\,320, \\ 120p - 3\,000 &= 4\,320, \\ p &= 61. \end{aligned}$$

Vidíme, že předpokládaná nerovnost $3p < 150$ neplatí, a proto úsek s volnými vstupenkami nemůže končit ve čtvrté pětině sálu.

e) Předpokládáme, že úsek s volnými vstupenkami končil až v páté pětině sálu. Můžeme postupovat jako v odstavcích b), c) a d) nebo použít jednodušší úvahu: peníze se utržily pouze za místa v páté pětině, prodávala-li by se místo toho v první pětině, získalo by se za každé o 40 Kč více. Prodávaných míst by tedy bylo $4\,320 : 40 = 108$ a všech míst $150 + 108 = 258$. Pak by ale úsek se 150 volnými vstupenkami nekončil v poslední pětině sálu, tedy předpoklad v úvodu této části řešení nemůže být naplněn.

V sále bylo 360 míst.

Z8–I–4

Dostali jsme krychli, která měla délku hrany vyjádřenou v centimetrech celým číslem. Všechny její stěny jsme obarvili na červeno a poté jsme ji rozřezali beze zbytku na krychličky o hraně 1 cm.

- Lukáš tvrdí, že krychliček se dvěma obarvenými stěnami je desetkrát více než těch se třemi obarvenými stěnami.
- Martina říká, že krychliček se dvěma obarvenými stěnami je patnáctkrát více než těch se třemi obarvenými stěnami.

Pravdu má však pouze jeden — kdo? A kolik měřila hrana původní krychle?

(*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Z formulace zadání plyne, že hrana původní krychle měřila aspoň 2 cm.

Krychlička má tři obarvené stěny, pokud její vrchol byl původně vrchol velké krychle. Takových krychliček je proto stejně jako vrcholů krychle, tedy 8.

Krychlička má právě dvě obarvené stěny, pokud jedna její hrana tvořila původně hranu velké krychle a zároveň žádný vrchol krychličky nebyl původně vrchol velké krychle. Protože velká krychle měla 12 hran, je počet krychliček právě se dvěma obarvenými stěnami násobkem dvanácti. Podle Lukáše je takových krychliček $10 \cdot 8 = 80$, což není možné, protože 80 není násobek dvanácti. Pravdu má Martina, která tvrdí, že takových krychliček je $15 \cdot 8 = 120$.

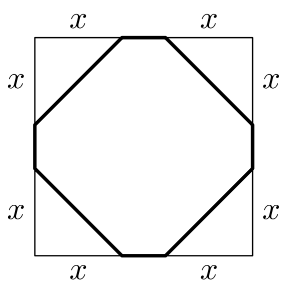
Na každé hraně velké krychle jsme rozřezáním získali $120 : 12 = 10$ krychliček se dvěma obarvenými stěnami. Hranu původní krychle však tvořily i dvě krychličky se třemi obarvenými stěnami, délka hrany tedy odpovídala dvanácti krychličkám. Hrana původní krychle měřila 12 cm.

Z8–I–5

Ze čtverce o straně 6 cm odřízneme od každého vrcholu shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky tak, aby se obsah čtverce zmenšil o 32 %. Jakou velikost mají odvěsny?

(*M. Krejčová*)

Možné řešení. Obsah čtverce o straně 6 cm je $36\,\mathrm{cm}^2$. Odříznuté části mají dohromady obsah $0{,}32 \cdot 36 = 11{,}52\,(\mathrm{cm}^2)$. Pokud odvěsnu odříznutého trojúhelníku označíme x, potom obsah každého takového trojúhelníku je $\frac{1}{2}x^2$.



Dohromady dostáváme rovnici, kterou snadno vyřešíme:

$$
\begin{aligned}
4 \cdot \frac{x^2}{2} &= 11{,}52,\\
x^2 &= 5{,}76,\\
x &= 2{,}4.
\end{aligned}
$$

Odvěsny odříznutých pravoúhlých trojúhelníků mají délku 2,4 cm.

Z8–I–6

Ve dvou místnostech vzdělávacího centra se konaly přednášky. Průměrný věk osmi lidí přítomných v první místnosti byl 20 let, průměrný věk dvanácti lidí ve druhé místnosti byl 45 let. V průběhu přednášky odešel jeden účastník a tím se průměrný věk všech osob v obou místnostech zvýšil o jeden rok. Kolik let bylo účastníkovi, který odešel?

(*L. Hozová*)

Možné řešení. Podle zadání byl součet věků osmi osob přítomných v první místnosti roven $8 \cdot 20 = 160$ let, součet věků dvanácti osob přítomných ve druhé místnosti byl

$12 \cdot 45 = 540$ let. Průměrný věk všech osob v obou místnostech tedy byl $\frac{160+540}{8+12} = \frac{700}{20} = 35$ let.

Pokud x značí věk člověka, který během přednášky odešel, potom víme, že

$$\frac{700 - x}{20 - 1} = 35 + 1,$$

a rovnici dořešíme:

$$\begin{aligned} 700 - x &= 36 \cdot 19, \\ x &= 700 - 684 = 16. \end{aligned}$$

Účastník, který odešel, měl 16 let.