59. ročník Matematické olympiády

I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Dostal jsem zadána dvě přirozená čísla. Poté jsem je obě zaokrouhlil na desítky. Určete, která čísla jsem měl zadána, pokud víte, že:

- podíl zaokrouhlených čísel je stejný jako podíl čísel původních,
- součin zaokrouhlených čísel je o 295 větší než součin původních čísel,
- součet zaokrouhlených čísel je o 6 větší než součet původních čísel.

(*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Přirozené číslo zaokrouhlujeme na desítky tak, že k němu přičteme vhodné celé číslo od -4 do 5. Podle třetí podmínky v zadání má být součet dvou zaokrouhlených čísel o 6 větší než součet čísel původních. Obě původní čísla se tedy zaokrouhlováním zvětší a musí o nich platit jeden z následujících předpokladů:

a) Jedno končí číslicí 5, druhé číslicí 9. (Označíme-li je p, q, po zaokrouhlení na desítky dostaneme $p+5$, $q+1$.)
b) Jedno končí číslicí 6, druhé číslicí 8. (Označíme-li je r, s, po zaokrouhlení na desítky dostaneme $r+4$, $s+2$.)
c) Jedno končí číslicí 7, druhé číslicí 7. (Označíme-li je t, u, po zaokrouhlení na desítky dostaneme $t+3$, $u+3$.)

Podle druhé podmínky v zadání je součin zaokrouhlených čísel o 295 větší než součin původních čísel. Protože součin zaokrouhlených čísel musí mít na místě jednotek číslici 0, vyplývá z této podmínky, že součin původních čísel končí číslicí 5. Součin čísel podle předpokladu a) skutečně končí číslicí 5, protože $5\cdot 9=45$. Avšak součin čísel podle předpokladu b) končí číslicí 8, protože $6\cdot 8=48$, a součin čísel podle předpokladu c) končí číslicí 9, protože $7\cdot 7=49$. Dále tedy budeme pracovat pouze s předpokladem a), protože jedině ten může vést ke správnému výsledku. Podle první a druhé podmínky v zadání docházíme k soustavě dvou rovnic:

$$\frac{p+5}{q+1}=\frac{p}{q},$$
$$(p+5)(q+1)=pq+295.$$

Úpravami první rovnice získáme vztah $p=5q$. S jeho využitím vyřešíme druhou rovnici:

$$\begin{aligned}pq+p+5q+5&=pq+295,\\ p+5q&=290,\\ 5q+5q&=290,\\ q&=29.\end{aligned}$$

Po dosazení:

$$p=5\cdot 29=145.$$

Výsledná čísla p a q mají na místě jednotek takové číslice, jaké jsme určili v našem předpokladu. Úloha má jediné řešení: hledaná čísla jsou 29 a 145.

Jiné řešení. Stejným postupem dojdeme ke stanovení předpokladů a), b), c). Poté, místo diskuse o číslici na místě jednotek v součinu původních čísel, sestavíme zvlášť pro každý předpoklad rovnici podle druhé podmínky v zadání:

a) $(p+5)(q+1) = pq + 295$, po úpravě $p + 5q + 5 = 295$,
b) $(r+4)(s+2) = rs + 295$, po úpravě $2r + 4s + 8 = 295$,
c) $(t+3)(u+3) = tu + 295$, po úpravě $3t + 3u + 9 = 295$.

Vidíme, že upravená rovnice b) nemůže mít v oboru celých čísel řešení; dosazením jakýchkoli celých čísel totiž získáme na levé straně sudý součet, což odporuje číslu 295 napravo. Podobně ani upravená rovnice c) nemůže mít v oboru celých čísel řešení, protože dosazením jakýchkoli celých čísel na levou stranu rovnice získáme součet dělitelný třemi, což odporuje číslu 295 napravo. Pouze rovnice a) může mít řešení v oboru celých čísel a k němu dojdeme za použití vztahu $p = 5q$ tak, jak bylo uvedeno výše.

Ještě jiné řešení. Stejně jako v předchozích řešeních nejprve dojdeme k závěru, že jedno původní číslo má na místě jednotek číslici 9, druhé číslici 5. První tedy můžeme zapsat jako $10a + 9$, po zaokrouhlení na desítky dostaneme $10a + 9 + 1$, tj. $10(a + 1)$. Druhé zapíšeme jako $10b + 5$, po zaokrouhlení na desítky dostaneme $10b + 5 + 5$, tj. $10(b + 1)$. Čísla a, b jsou čísla přirozená nebo nula (v zadání není řečeno, že žádné číslo nemůže být jednomístné). Podle druhé podmínky v zadání platí:

$$\begin{aligned}
10(a+1)\cdot 10(b+1) &= (10a+9)\cdot(10b+5) + 295,\\
100ab + 100a + 100b + 100 &= 100ab + 90b + 50a + 45 + 295,\\
50a + 10b &= 240,\\
5a + b &= 24.
\end{aligned}$$

Všechna možná řešení vypíšeme do tabulky:

a	0	1	2	3	4
b	24	19	14	9	4

Odpovídající dvojice čísel jsou

$10a + 9$	9	19	29	39	49
$10b + 5$	245	195	145	95	45

U každé z těchto dvojic ověříme, zda je splněna první podmínka:

- $\frac{9}{245} \neq \frac{10}{250}$, tedy dvojice 9 a 245 není řešením,
- $\frac{19}{195} \neq \frac{20}{200}$, tedy dvojice 19 a 195 není řešením,
- $\frac{29}{145} = \frac{30}{150} = \frac{1}{5}$, tedy dvojice 29 a 145 je řešením,
- $\frac{39}{95} \neq \frac{40}{100}$, tedy dvojice 39 a 95 není řešením,
- $\frac{49}{45} \neq \frac{50}{50}$, tedy dvojice 49 a 45 není řešením.

Všem uvedeným podmínkám vyhovuje pouze dvojice 29 a 145.

Z9–I–2

Pat a Mat byli na výletě. Vyšli ráno po osmé hodině, kdy velká a malá ručička na Patových hodinkách ležely v opačných polopřímkách. V opačných polopřímkách byly ručičky Patových hodinek, i když se oba přátelé před polednem vrátili. Mat dobu výletu měřil na stopkách. Určete i vy s přesností na sekundy, jak dlouho trvala cesta. Předpokládejte, že Patovy hodinky a Matovy stopky šly přesně. (*M. Volfová*)

Možné řešení. Rychlost malé ručičky je 30° za 60 min, tj. $0{,}5^\circ$ za 1 min. Rychlost velké ručičky je 360° za 60 min, tj. 6° za 1 min. Polohu ručičky na ciferníku, která ukazuje na číslo 12, nazvěme jako „základní polohu“. V 8:00 je velká ručička v základní poloze, malá ručička v 8:00 ukazuje na číslo 8, tedy od základní polohy je pootočena o 240°. Dobu, která uplynula od 8:00 do okamžiku, kdy ručičky ležely v opačným polopřímkách a začal výlet, označíme jako x min. V hledaný okamžik je velká ručička od základní polohy pootočena o $(0+6x)^\circ$, malá ručička o $(240+0{,}5x)^\circ$. Ručičky v ten moment leží v opačným polopřímkách, a tak pootočení malé ručičky od základní polohy je o 180° větší než pootočení velké ručičky. Docházíme k rovnici, jejímž vyřešením zjistíme x:

$$\begin{aligned}(0+6x)+180 &= 240+0{,}5x,\\ 5{,}5x &= 60,\\ x &= 10{,}\overline{90}.\end{aligned}$$

Hodnota $10{,}\overline{90}$ min je přibližně 10 min 54,5 s; výlet tedy začal v 8 h 10 min 54,5 s.

Podobně sestavíme rovnici, kde y vyjadřuje dobu v minutách, která uplynula od 11:00 do okamžiku, kdy výlet skončil:

$$\begin{aligned}(0+6y)+180 &= 330+0{,}5y,\\ 5{,}5y &= 150,\\ y &= 27{,}\overline{27}.\end{aligned}$$

Hodnota $27{,}\overline{27}$ min je přibližně 27 min 16,4 s; výlet tedy skončil v 11 h 27 min 16,4 s.

Po odečtení dvou nalezených časů dojdeme k závěru, že výlet trval 3 h 16 min 22 s.

Poznámka. Pokud všechny časové údaje vyjadřujeme od začátku v hodinách, předchozí rovnice pro neznámou x vypadá takto:

$$(0+360x)+180 = 240+30x,$$

a jejím řešením je $x = \frac{2}{11}$ (h). Podobně neznámá y vychází $\frac{5}{11}$ (h) a celý výlet trval

$$\left(11+\frac{5}{11}\right)-\left(8+\frac{2}{11}\right) = 3+\frac{3}{11}\text{ (h)},$$

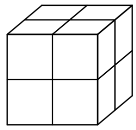
tj. přibližně 3 h 16 min 22 s.

Jiné řešení. Během půldne, tedy v době od 0:00 do 12:00, leží ručičky v opačných polopřímkách celkem jedenáctkrát. Časové intervaly mezi takovými okamžiky jsou vždy stejné (obě ručičky se pohybují konstantní rychlostí). Odtud plyne, že délka každého intervalu je $\frac{12}{11}$ h. Doba výletu odpovídá třem zmíněným intervalům; ke správnému výsledku lze tedy dojít i tímto výpočtem:

$$3\cdot\frac{12}{11} = \frac{36}{11} = 3+\frac{3}{11}\text{ (h)}.$$

Z9–I–3

Na obrázku je krychle o hraně 2 cm tvořená osmi krychličkami s hranou 1 cm. Osm stěn krychliček je obarveno černě, ostatní jsou bílé. Přitom z nich lze složit krychli, jejíž povrch je bílý. Kolika způsoby mohou být krychličky obarveny? Předpokládejte, že stejně obarvené krychličky nedokážeme odlišit, mohou se tedy zaměnit.



(*K. Pazourek*)

Možné řešení. Ze zadání vyplývá, že každá z osmi krychliček, ze kterých je složena velká krychle, má určitě tři bílé stěny, které navíc mají společný vrchol. Zbylé stěny každé z krychliček jsou buď černé, nebo bílé. Celkem osm stěn má být černých, přitom nezáleží, jak krychličky uspořádáme, důležité je jen, kolik stěn mají obarvených. Navíc nezáleží, jestli například obarvíme první a druhou stěnu, nebo první a třetí stěnu — krychličku pootočením převedeme z jednoho případu na druhý a obráceně. Vypišme si možná obarvení krychliček. V řádcích jsou zaznamenány počty černých stěn na jednotlivých krychličkách, vždy od největšího počtu k nejmenšímu:

- 3, 3, 2, 0, 0, 0, 0, 0,
- 3, 3, 1, 1, 0, 0, 0, 0,
- 3, 2, 2, 1, 0, 0, 0, 0,
- 3, 2, 1, 1, 1, 0, 0, 0,
- 3, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0,
- 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 0,
- 2, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 0,
- 2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0,
- 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0,
- 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.

Dostáváme tak celkem 10 různých obarvení krychliček.

Z9–I–4

Adam a Eva dostali košík, ve kterém bylo 31 jablek. První den snědla Eva tři čtvrtiny toho, co snědl Adam. Druhý den snědla Eva dvě třetiny toho, co snědl týž den Adam. Druhého dne večer byl košík prázdný. Kolik jablek snědla z košíku Eva? (Adam i Eva jablka jedí celá a nedělí se o ně.) (*L. Hozová*)

Možné řešení. Podle zadání snědla Eva první den tři čtvrtiny toho, co snědl Adam. Proto počet jablek, které první den snědl Adam, musí být násobkem čtyř. Označíme jej $4a$, kde a je neznámé přirozené číslo. Počet jablek, které první den snědla Eva, je pak $3a$. Počty jablek snědených za druhý den označíme obdobně: Adam snědl $3b$ a Eva $2b$ jablek, kde b je neznámé přirozené číslo. Sestavíme rovnici o dvou neznámých a budeme pro ni hledat řešení v oboru přirozených čísel:

$$4a + 3a + 3b + 2b = 31,$$

po úpravě

$$7a + 5b = 31.$$

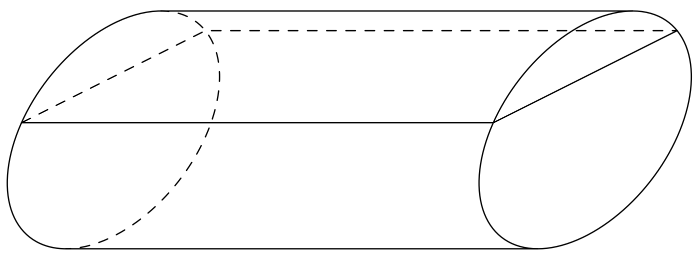
Za a postupně dosazujeme přirozená čísla 1 až 4 a pokaždé určujeme, zda i b vychází jako přirozené číslo. (Dosazovat za a větší čísla nezkoušíme, protože b by vycházelo záporné.) Takto najdeme jediné řešení rovnice v oboru přirozených čísel:

$$a = 3,\ b = 2.$$

První den Eva snědla $3a = 3 \cdot 3 = 9$ jablek, druhý den $2b = 2 \cdot 2 = 4$ jablka. Celkem snědla 13 jablek.

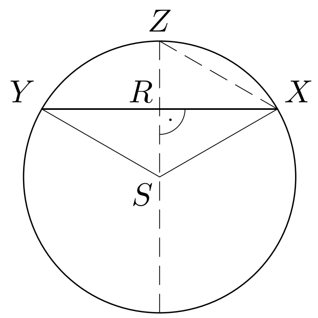
Z9–I–5

Řidič převáží mléko v cisterně tvaru válce. Průměr podstavy je 180 cm, délka cisterny je 4 m. Kolik hl mléka je v cisterně, jestliže je naplněna do tří čtvrtin průměru?



(*M. Krejčová*)

Možné řešení. Část podstavy, která je pod hladinou mléka v cisterně, rozdělíme na nekonvexní kruhovou výseč a rovnoramenný trojúhelník XYS.



Velikost úsečky SX, stejně jako SZ, je rovna poloměru podstavy, tj. $|SX| = |SZ| = r = 90\,\text{cm}$. Podle zadání je bod R ve středu úsečky SZ, tj. $|SR| = |RZ| = \frac{1}{2}r$. Odtud plyne, že (pravoúhlé) trojúhelníky SXR a ZXR jsou shodné, tudíž $|ZX| = |SX|$ a trojúhelník SXZ je rovnostranný. Proto je velikost vnitřního úhlu RSX rovna $60°$, velikost vnitřního úhlu XSY je $120°$ a velikost vnějšího úhlu XSY je $240°$. Nekonvexní kruhové výseči tedy náleží $\frac{2}{3}$ obsahu celého kruhu, tj.

$$S_v = \frac{2}{3}\pi r^2 \doteq 16\,965\,\text{cm}^2 \doteq 170\,\text{dm}^2.$$

Obsah trojúhelníku XYS je roven $S_t = |RX| \cdot |RS|$. Velikost úsečky RS je rovna $\frac{1}{2}r$ a velikost $|RX|$ vyjádříme pomocí Pythagorovy věty v trojúhelníku SXR: $|RX|^2 = |SX|^2 - |RS|^2 = r^2 - (\frac{1}{2}r)^2 = \frac{3}{4}r^2$, tedy $|RX| = \frac{\sqrt{3}}{2}r$. Po dosazení dostáváme

$$S_t = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 \doteq 3\,507\,\mathrm{cm}^2 \doteq 35\,\mathrm{dm}^2.$$

Část podstavy, která je pod hladinou mléka v cisterně, má tedy obsah

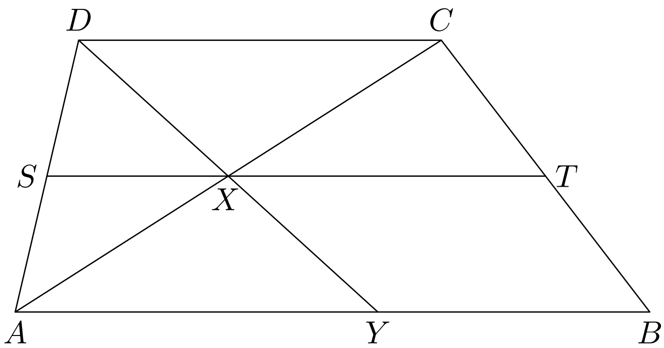
$$S = S_v + S_t \doteq 205\,\mathrm{dm}^2.$$

Cisterna je dlouhá $d = 4\,\mathrm{m} = 40\,\mathrm{dm}$, objem převáženého mléka je tedy přibližně roven

$$V = S \cdot d \doteq 8\,200\,\mathrm{dm}^3 = 82\,\mathrm{hl}.$$

Z9–I–6

V lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD délky 7 cm a 4 cm jsou body S a T středy stran AD a BC, viz obrázek. Bod X je průsečík úseček AC a ST, bod Y je průsečík úsečky AB a přímky DX. Obsah čtyřúhelníku $AYCD$ je $12\,\mathrm{cm}^2$. Vypočtěte obsah lichoběžníku $ABCD$.



(*M. Dillingerová*)

Možné řešení. Úsečka ST spojuje středy ramen lichoběžníku $ABCD$, proto musí být rovnoběžná s jeho základnou CD. Úsečka SX, která leží na úsečce ST, je tedy rovnoběžná se stranou CD trojúhelníku CDA. Dále víme, že její krajní bod S je střed strany DA. Úsečka SX je proto střední příčka trojúhelníku CDA. Obdobně lze dokázat, že úsečka SX je střední příčka trojúhelníku AYD. Pro střední příčku trojúhelníku obecně platí, že má dvakrát menší velikost než s ní rovnoběžná strana trojúhelníku. Délka úsečky SX je dvakrát menší než délka strany CD a zároveň je dvakrát menší než délka strany AY. Velikosti úseček CD a AY proto musejí být stejné, obě tedy měří 4 cm. Protože rovnoběžné strany AY a CD čtyřúhelníku $AYCD$ mají stejnou délku, musí jít o kosodélník. Pro výpočet jeho obsahu platí $S_1 = |CD| \cdot v$, kde v je délka jeho výšky ke straně CD. Ze zadání známe S_1 a $|CD|$, délku v spočítáme:

$$v = S_1 : |CD| = 12 : 4 = 3\,(\mathrm{cm}).$$

Tato délka v je také rovna vzdálenosti základen lichoběžníku $ABCD$. Obsah tohoto lichoběžníku je tedy

$$S_2 = \frac{v}{2} \cdot (|AB| + |CD|) = \frac{3}{2}(7 + 4) = 16{,}5\,(\mathrm{cm}^2).$$

Jiné řešení. Dokážeme, že trojúhelníky AXY a CXD jsou shodné. Jejich úhly AXY a CXD jsou úhly vrcholové a mají tedy stejnou velikost. Rovnoběžky AB a DC jsou proťaty příčkou AC, úhly YAX a DCX zmíněných trojúhelníků jsou tedy úhly střídavé a i ony mají stejnou velikost. Tyto dva trojúhelníky jsou tedy podobné. Navíc výšky těchto trojúhelníků k odpovídajícím si stranám AY a CD mají stejnou délku, neboť obě představují vzdálenost základny lichoběžníku $ABCD$ a jeho střední příčky. Protože se trojúhelníky AXY a CXD shodují ve třech právě zmíněných prvcích, musejí být shodné. Odpovídající si strany AY a CD tedy mají stejnou velikost, a sice 4 cm. Dále je řešení shodné s výše uvedeným.