II. kolo kategorie Z6

Z6–II–1

Určete obsah obdélníku, když víte, že šířka je rovna $\frac{2}{3}$ jeho délky a obvod měří 148 cm. (*M. Volfová*)

Možné řešení. Jestliže délku obdélníku rozdělíme na tři stejně velké díly, pak šířce tohoto obdélníku odpovídají dva z těchto tří dílů. Obvodu pak odpovídá 10 takových dílů, protože $3 + 2 + 3 + 2 = 10$. Obvod obdélníku ale známe, je 148 cm. To znamená, že jeden ze zmiňovaných dílů má délku $148 : 10 = 14{,}8$ (cm). Nyní již snadno určíme rozměry daného obdélníku a jeho obsah:

- délka (3 díly): $a = 3 \cdot 14{,}8 = 44{,}4$ (cm),
- šířka (2 díly): $b = 2 \cdot 14{,}8 = 29{,}6$ (cm),
- obsah: $S = a \cdot b = 44{,}4 \cdot 29{,}6 = 1314{,}24$ (cm^2).

Hodnocení. 2 body za poznatek, že obvod obdélníku je tvořen deseti díly, a jeho zdůvodnění; 1 bod za vypočtení délky jednoho dílu; po 1 bodu udělte za rozměry obdélníku a poslední 1 bod za obsah.

Z6–II–2

Myslím si čtyřmístné číslo, jehož každá číslice je jiná. Když škrtnu poslední dvě číslice v tomto čísle, dostanu prvočíslo. Stejně tak dostanu prvočíslo i v případě, kdy vyškrtnu druhou a čtvrtou číslici, a dokonce i v případě, kdy vyškrtnu prostřední dvě číslice. Mé myšlené číslo ovšem prvočíslo není — můžeme ho beze zbytku dělit třemi. Čísel, která mají tyto vlastnosti, je víc. To mé je ale největší z nich. Které číslo si myslím? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Hledáme číslo ve tvaru $\overline{abcd}$ (číslice a, b, c, d jsou různé). Podle zadání je $\overline{ab}$ prvočíslo, stejně tak i $\overline{ac}$ a $\overline{ad}$. Hledáme tedy tři různá dvojmístná prvočísla, která začínají stejnou číslicí (tj. číslice na místě desítek je stejná). Z tabulek zjistíme, které trojice přichází v úvahu:

- 1. trojice: 13, 17, 19, číslice $a = 1$,
- 2. trojice: 41, 43, 47, číslice $a = 4$,
- 3. trojice: 71, 73, 79, číslice $a = 7$.

U každé trojice čísel zjistíme, zda lze z příslušných číslic vytvořit číslo dělitelné třemi:

- 3. trojice: číslice 7, 1, 3, 9, ciferný součet 20 — protože není ciferný součet dělitelný třemi, není ani číslo vytvořené z těchto číslic (v libovolném pořadí) dělitelné třemi.
- 2. trojice: číslice 4, 1, 3, 7, ciferný součet 15 — protože je ciferný součet dělitelný třemi, je i číslo vytvořené z těchto číslic (v libovolném pořadí) dělitelné třemi.
- 1. trojice: číslice 1, 3, 7, 9, ciferný součet 20 — protože není ciferný součet dělitelný třemi, není ani číslo vytvořené z těchto číslic (v libovolném pořadí) dělitelné třemi.

Vyhovují pouze prvočísla z druhé trojice. První číslice hledaného čtyřmístného čísla je 4, protože prvočísla začínají čtyřkou. Ostatní číslice seřadíme od největší po nejmenší, abychom dostali největší číslo. Hledané číslo je 4 731.

Poznámka. Řešitel nemusí prověřovat dělitelnost třemi u celé trojice najednou (tj. kritériem dělitelnosti). Může též vytvořit všechna čísla z nalezených číslic (tj. zaměňovat číslice na místě stovek, desítek a jednotek; číslice na místě tisíců je určená jednoznačně), seřadit je podle velikosti od největšího po nejmenší a postupně zkoušet, zda je lze dělit třemi beze zbytku.

Hodnocení. 2 body za vypsání uvedených tří trojic prvočísel (2 body udělte i v případě, kdy řešitel začal dělitelnost třemi pro příslušné trojice čísel ihned ověřovat, a tedy po nalezení trojice 41, 43, 47 už trojici 13, 17, 19 nehledal); 3 body za zavržení trojic 71, 73, 79 a 13, 17, 19 pro nesplnění podmínky dělitelnosti (3 body udělte i v případě, kdy řešitel po nalezení vyhovující trojice 41, 43, 47 už trojici 13, 17, 19 nezkoušel); 1 bod za nalezení správného výsledku 4 731.

Z6–II–3

Krabička tvaru krychle o hraně 4 cm je zcela naplněna srovnanými hracími kostkami, krychličkami s hranou délky 1 cm. Vymyslete všechny různé krabičky tak, aby měly čtvercové dno a do každé z nich se všechny kostky přesně vešly. Napište jejich rozměry.
(*M. Krejčová*)

Možné řešení. V popsané krabičce je právě 64 kostek, protože u každé hrany krabičky jsou 4 kostky a $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Hledáme tedy všechny možné rozklady čísla 64 na součin tří činitelů, z nichž dva jsou stejné:

- $1 \cdot 1 \cdot 64$,
- $2 \cdot 2 \cdot 16$,
- $4 \cdot 4 \cdot 4$,
- $8 \cdot 8 \cdot 1$.

Kromě krabičky použité v zadání můžeme vytvořit ještě tři krabičky další, jejichž rozměry jsou (první dva údaje vždy odpovídají dnu): 1 cm, 1 cm, 64 cm nebo 2 cm, 2 cm, 16 cm nebo 8 cm, 8 cm, 1 cm.

Hodnocení. 2 body za vypočtení počtu kostiček v zadané krabičce; 1 bod za vysvětlení, které rozklady čísla 64 na součin je nutné hledat; po 1 bodu za nalezení potřebného součinu a z něj vyplývajících rozměrů nové krabičky (tj. maximálně 3 body za tuto část), součin odpovídající krabičce ze zadání a její rozměry ponechte bez bodu.

Poznámka. Uvede-li řešitel ve své práci pouze informaci o rozměrech krabičky ze zadání (tj. 4 cm, 4 cm, 4 cm) a žádnou další informaci, která by byla bodově hodnocena (např. počet všech kostiček), nehodnoťte tuto úlohu žádným bodem. To, zda řešitel mezi hledané krabičky zahrne či nezahrne i krabičku uvedenou v zadání, nemá vliv na hodnocení úlohy.