59. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

Průměrný věk rodiny Kebulových, kterou tvoří otec, matka a několik dětí, je 18 let. Přitom průměrný věk rodiny bez tatínka, kterému je 38 let, je 14 let. Kolik dětí mají Kebulovi? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Počet členů této rodiny označíme n. Součet věků všech členů je roven součinu průměrného věku rodiny a počtu členů, tedy $18 \cdot n$. Rodina bez tatínka má $n-1$ členů a součet věků těchto členů je $14 \cdot (n-1)$. Víme, že tento součet je o 38 menší než součet věků všech členů. Docházíme tedy k rovnici

$$18 \cdot n = 14 \cdot (n-1) + 38,$$

po úpravě dostaneme

$$4n = 24,$$
$$n = 6.$$

Celá rodina má 6 členů, Kebulovi tedy mají 4 děti.

Hodnocení. 2 body za sestavení rovnice; 2 body za zdůvodnění tohoto sestavení; 1 bod za vyřešení rovnice; 1 bod za správný závěr.

Jiné řešení. Pomineme-li, že mezi dětmi a rodiči musí být určitý věkový rozestup, lze si po přečtení první věty v zadání představit rodinu, kterou tvoří jen 18letí členové. Po přečtení druhé věty můžeme svou představu upravit a v rodině vidět 38letého tatínka a zbytek členů 14letých. Věk tatínka jsme přitom zvýšili o 20, věk ostatních členů snížili vždy o 4. Aby při upravování naší představy zůstal součet věků všech členů rodiny stejný, musí být počet členů rodiny bez tatínka $20 : 4 = 5$. Jedním z nich je maminka, děti tak musejí být 4.

Hodnocení. 6 bodů.

Z8–II–2

Kolik existuje šestimístných přirozených čísel, která mají na místě statisíců číslici 1, na místě tisíců číslici 2 a na místě desítek číslici 3 a jsou beze zbytku dělitelná číslem 45? (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Číslo je dělitelné číslem 45, právě když je dělitelné čísly 5 i 9. Na místě jednotek tedy musí být číslice 0 nebo 5 a jeho ciferný součet musí být násobkem devíti.

Nejprve určíme počet hledaných čísel, která mají na místě jednotek číslici 0. Tato čísla označíme jako $\overline{1A2B30}$ a jejich ciferný součet je pak roven $6+A+B$. Má-li být tento součet násobkem devíti a přihlédneme-li k tomu, že neznámé A a B označují číslice 0 až 9, může být ciferný součet roven buď 9, nebo 18. V prvním případě platí $A+B=3$, ve druhém $A+B=12$. Následující tabulky ukazují, kolik lze nalézt dvojic číslic dávajících součet 3, respektive 12:

A	3	2	1	0
B	0	1	2	3

A	9	8	7	6	5	4	3
B	3	4	5	6	7	8	9

Čísel tvaru $\overline{1A2B30}$ dělitelných číslem 45 tedy existuje $4 + 7 = 11$.

Nyní určeme počet hledaných čísel, která mají na místě jednotek číslici 5. Ta označíme jako $\overline{1C2D35}$ a jejich ciferný součet je pak $11 + C + D$. Podobně jako v předchozí části úlohy zjišťujeme, že buď musí platit $C + D = 7$, nebo $C + D = 16$. Sestavíme opět tabulky:

C	7	6	5	4	3	2	1	0
D	0	1	2	3	4	5	6	7

C	9	8	7
D	7	8	9

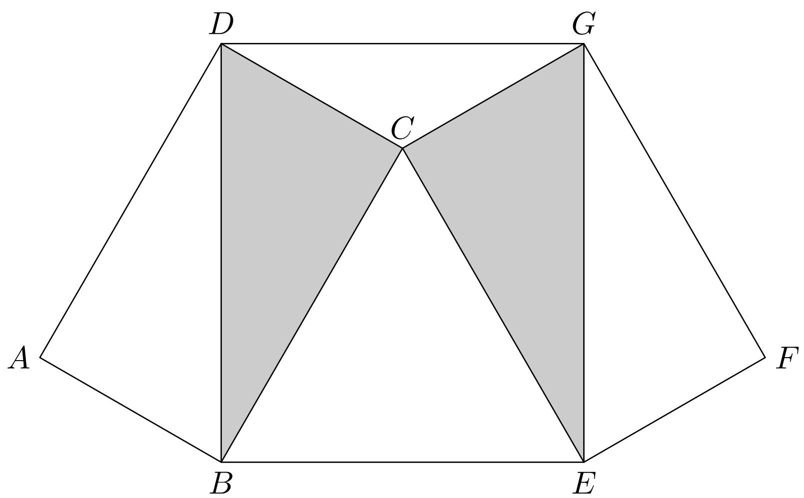
Čísel tvaru $\overline{1C2D35}$ dělitelných číslem 45 tedy existuje $8+3 = 11$. Čísel odpovídajících zadání je celkem $11 + 11 = 22$.

Poznámka. Žáci také mohou v úvodu rozdělit hledaná čísla do skupin s ciferným součtem 9, 18 a 27. Ve skupině s ciferným součtem 9 může být na místě jednotek pouze číslice 0, ve skupině s ciferným součtem 27 může být na místě jednotek pouze číslice 5 a ve skupině s ciferným součtem 18 mohou být na místě jednotek obě tyto číslice.

Hodnocení. 1 bod za podmínku dělitelnosti číslem 45; 1 bod za rozdělení hledaných čísel do skupin; 4 body za správné určení čísel v každé skupině.

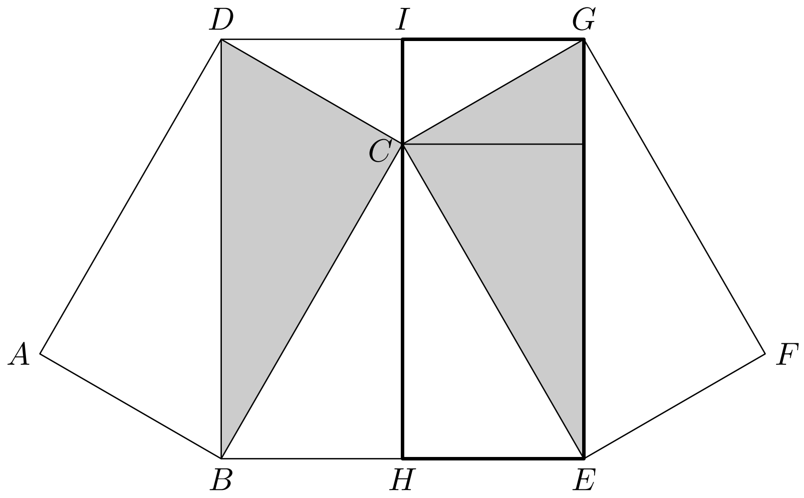
Z8–II–3

Na následujícím obrázku je šestiúhelník $ABEFGD$. Čtyřúhelníky $ABCD$ a $EFGC$ jsou shodné obdélníky a čtyřúhelník $BEGD$ je také obdélník. Určete poměr obsahů bílé a šedé části šestiúhelníku, jestliže $|AB| = 5\,\text{cm}$ a trojúhelník BEC je rovnostranný.



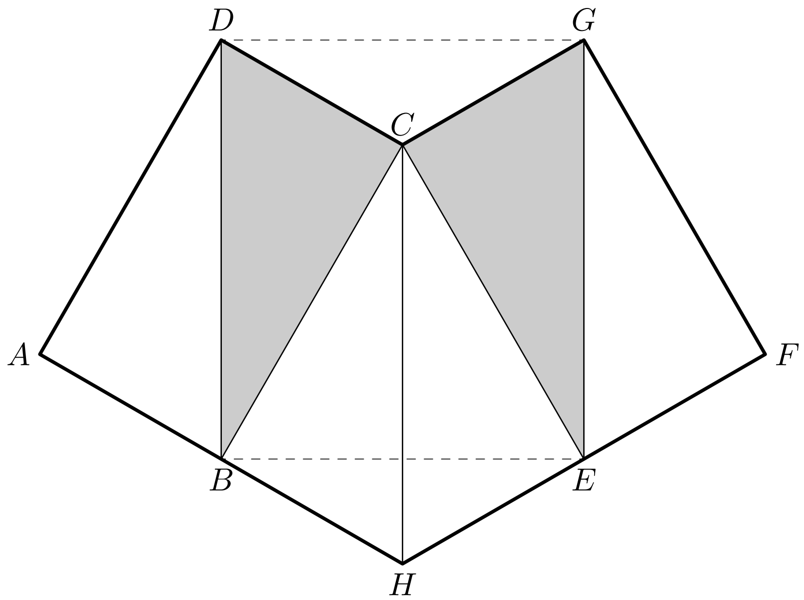
($K.\ Pazourek$)

Možné řešení. Označme středy úseček BE a GD postupně H a I. Potom obdélník $HEGI$ tvoří polovinu obdélníku $BEGD$ a bod C leží na jeho straně HI. Tento obdélník ještě rozdělíme kolmicí spuštěnou z bodu C.



Nyní je zřejmé, že poměr bílé a šedé plochy v obdélníku $HEGI$ je $1:1$. Trojúhelníky CGE a EFG jsou shodné, a proto jsou obsahy bílých a šedých ploch v pětiúhelníku $HEFGI$ v poměru $2:1$. Celý obrázek je symetrický podle osy HI, tudíž poměr obsahů bílých a šedých částí šestiúhelníku $ABEFGD$ je stejný.

Poznámka. Lze řešit i vhodným posunutím trojúhelníku DGC a následným rozdělením vzniklého útvaru na šest shodných trojúhelníků, viz obrázek.



Hodnocení. 5 bodů za správný a zdůvodněný postup; 1 bod za výsledek.

Jiné řešení. Protože trojúhelník BEC je rovnostranný, jsou všechny jeho vnitřní úhly $60°$. Odtud plyne, že v trojúhelníku CDB měří vnitřní úhly $30°$, $90°$ a $60°$, proto je tento trojúhelník polovinou rovnostranného trojúhelníku se stranou délky $2\cdot|CD| = 2\cdot|AB| = 10\,\mathrm{cm}$. Proto je $|BD| = 10\,\mathrm{cm}$ a z Pythagorovy věty spočtěme délku strany BC v trojúhelníku CDB:

$$|BC| = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}\,(\mathrm{cm}).$$

Obsah trojúhelníku CDB je tedy roven

$$S_{CDB} = \frac{1}{2}|BC|\cdot|CD| = \frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{3}\cdot 5 = \frac{25}{2}\sqrt{3}\,(\mathrm{cm}^2).$$

Stejný obsah mají i trojúhelníky ABD, CGE a FEG, protože jsou s trojúhelníkem CDB shodné. Protože je trojúhelník BEC rovnostranný, je $|BE| = |BC|$, a spočtěme obsah obdélníku $BEGD$:

$$S_{BEGD} = |BE| \cdot |BD| = 5\sqrt{3} \cdot 10 = 50\sqrt{3}\,(\mathrm{cm}^2).$$

Potom obsah bílé části šestiúhelníku $ABEFGD$ je

$$\begin{aligned} S_{\text{bílá}} &= S_{ABD} + (S_{BEGD} - S_{CDB} - S_{CGE}) + S_{FEG} = \\ &= S_{CDB} + (S_{BEGD} - S_{CDB} - S_{CDB}) + S_{CDB} = \\ &= S_{BEGD} = 50\sqrt{3}\,(\mathrm{cm}^2). \end{aligned}$$

Obsah šedé části šestiúhelníku $ABEFGD$ je

$$S_{\text{šedá}} = S_{CDB} + S_{CGE} = 2 \cdot S_{CDB} = 25\sqrt{3}\,(\mathrm{cm}^2).$$

Proto poměr obsahů bílých a šedých částí šestiúhelníku je

$$S_{\text{bílá}} : S_{\text{šedá}} = 50\sqrt{3} : 25\sqrt{3} = 2 : 1.$$

Hodnocení. 1 bod za výpočet délky úsečky BC; po 1 bodu za výpočty obsahů trojúhelníku CDB a obdélníku $BEGD$; po 1 bodu za stanovení obsahů šedých a bílých častí; 1 bod za spočtení poměru obsahů bílé a šedé plochy (jednotlivé výpočty musí být zdůvodněny).

Poznámka. Přibližné hodnoty předchozích veličin vyjádřené pomocí tabulek bez kalkulačky jsou: $|BC| \doteq 8,66\,\mathrm{cm}$, $S_{CDB} \doteq 21,65\,\mathrm{cm}^2$, $S_{BEGD} = S_{\text{bílá}} \doteq 86,6\,\mathrm{cm}^2$, $S_{\text{šedá}} \doteq 43,3\,\mathrm{cm}^2$ a poměr $S_{\text{bílá}} : S_{\text{šedá}} \doteq 2 : 1$. Jestliže řešitel počítá s přibližnými hodnotami a v jinak zcela správném řešení si na konci neuvědomí, že jím vypočtený poměr $2 : 1$ je hodnota toliko přibližná, udělte mu celkem 5 bodů.