I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Vítek má napsána dvě čísla, 541 a 293. Z šesti použitých číslic má nejprve vyškrtnout dvě tak, aby součet dvou takto získaných čísel byl největší možný. Poté má z původních šesti číslic vyškrtnout dvě tak, aby rozdíl dvou takto získaných čísel byl nejmenší možný (odečítá menší číslo od většího). Které číslice má vyškrtnout? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Nejprve budeme vyškrtávat číslice tak, aby byl součet co největší. Buď můžeme dvě číslice vyškrtnout z prvního čísla, nebo můžeme dvě číslice vyškrtnout z druhého, nebo je možnost vyškrtnout z každého čísla po jedné číslici. V každém případě škrtáme číslice tak, aby výsledný sčítanec byl co největší. Dostáváme tato čísla:

- škrtneme 4 a 1, zbyde 5 a 293: součet 298,
- škrtneme 2 a 3, zbyde 541 a 9: součet 550,
- škrtneme 1 a 2, zbyde 54 a 93: součet 147.

Vidíme, že největší součet (550) získáme po vyškrtnutí číslic 2 a 3 z druhého čísla.

Nyní budeme hledat nejmenší rozdíl. Opět můžeme vyškrtnout dvě číslice z prvního čísla, nebo dvě číslice z druhého, nebo z každého čísla po jedné číslici. Kdybychom vyškrtávali dvě číslice z jednoho čísla, byl by rozdíl vždy trojmístné číslo. Když vyškrtáváme z každého čísla po jedné číslici, dostaneme tato čísla:

- škrtneme 5 a 2, zbyde 41 a 93: rozdíl 52,
- škrtneme 5 a 9, zbyde 41 a 23: rozdíl 18,
- škrtneme 5 a 3, zbyde 41 a 29: rozdíl 12,
- škrtneme 4 a 2, zbyde 51 a 93: rozdíl 42,
- škrtneme 4 a 9, zbyde 51 a 23: rozdíl 28,
- škrtneme 4 a 3, zbyde 51 a 29: rozdíl 22,
- škrtneme 1 a 2, zbyde 54 a 93: rozdíl 39,
- škrtneme 1 a 9, zbyde 54 a 23: rozdíl 31,
- škrtneme 1 a 3, zbyde 54 a 29: rozdíl 25.

Vidíme, že nejmenší rozdíl (12) získáme vyškrtnutím 5 z prvního čísla a 3 z druhého čísla.

Z5–I–2

V Trpasličím království měří vzdálenosti v pohádkových mílích (pm), v pohádkových sázích (ps) a v pohádkových loktech (pl). Na vstupní bráně do Trpasličího království je následující tabulka pro převody mezi jejich jednotkami a našimi:

- 1 pm = 3,85 m,
- 1 ps = 105 cm,
- 1 pl = 250 mm.

Král Trpaslík I. nechal přeměřit vzdálenost od zámecké brány k pohádkovému jezírku. Tři pozvaní zeměměřiči dospěli k těmto výsledkům: první uváděl 4 pm 4 ps 18 pl, druhý 3 pm 2 ps 43 pl a třetí 6 pm 1 ps 1 pl. Jeden z nich se však zmýlil. Jaká je vzdálenost v metrech od zámecké brány k pohádkovému jezírku? O kolik centimetrů se spletl nepřesný zeměměřič? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Nejprve si převedeme pohádkové míry např. na centimetry:

$$1\,\mathrm{pm} = 385\,\mathrm{cm},\ 1\,\mathrm{ps} = 105\,\mathrm{cm},\ 1\,\mathrm{pl} = 25\,\mathrm{cm}.$$

Nyní vyjádříme v centimetrech vzdálenosti změřené jednotlivými zeměměřiči:
1. zeměměřič naměřil 4 pm 4 ps 18 pl, tj.

$$4 \cdot 385 + 4 \cdot 105 + 18 \cdot 25 = 1\,540 + 420 + 450 = 2\,410\,(\mathrm{cm}).$$

2. zeměměřič naměřil 3 pm 2 ps 43 pl, tj.

$$3 \cdot 385 + 2 \cdot 105 + 43 \cdot 25 = 1\,155 + 210 + 1\,075 = 2\,440\,(\mathrm{cm}).$$

3. zeměměřič naměřil 6 pm 1 ps 1 pl, tj.

$$6 \cdot 385 + 1 \cdot 105 + 1 \cdot 25 = 2\,310 + 105 + 25 = 2\,440\,(\mathrm{cm}).$$

Vzdálenost od zámecké brány k pohádkovému jezírku je $2\,440\,\mathrm{cm} = 24{,}4\,\mathrm{m}$. První zeměměřič se spletl o $2\,440 - 2\,410 = 30\,(\mathrm{cm})$.

Z5–I–3

Čtyři kamarádi Adam, Mojmír a dvojčata Petr a Pavel získali v hodinách matematiky celkem 52 smajlíků, každý alespoň 1. Přitom dvojčata dohromady mají 33, ale nejúspěšnější byl Mojmír. Kolik jich získal Adam? (*M. Volfová*)

Možné řešení. Všech smajlíků je 52, přitom dvojčata jich získala 33 a Adam alespoň jeden. Pro Mojmíra zbývá nejvýše $52 - 33 - 1 = 18$ smajlíků. Aby jich měl nejvíc ze všech, může každé z dvojčat mít nejvýše 17 smajlíků. To ale znamená, že jich Petr získal právě 17 a Pavel 16, nebo naopak. Kdyby měl totiž jeden méně než 16, musel by mít druhý víc než 17 tak, aby dohromady měli 33. Odtud také vyplývá, že Mojmír nemohl získat méně než 18 smajlíků, aby měl víc než každé dvojče. Proto Mojmír získal právě 18 smajlíků a na Adama tak zbývá jeden smajlík :-).

Jiné řešení. Víme, že dvojčata získala dohromady 33 smajlíků a přitom každý alespoň jeden. Kdyby Petr získal 32 smajlíků a Pavel jeden, musel by jich Mojmír získat alespoň 33, aby měl ze všech nejvíc. Pak by ale všichni dohromady i s Adamem měli alespoň $33 + 33 + 1 = 67$ smajlíků, což není možné, protože ze zadání víme, že dohromady mají 52. Podobně, kdyby Petr získal 31 smajlíků a Pavel 2, musel by Mojmír mít alespoň 32, dohromady s Adamem pak $33+32+1 = 66$, což je stále moc… Stejnou úvahou lze vyloučit všechny možnosti rozdělení smajlíků mezi dvojčaty až na následující případ: Petr 17, Pavel 16 (nebo opačně), potom Mojmír 18 a Adam 1.

Z5–I–4

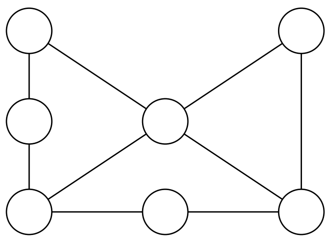
Pan Tik a pan Tak prodávali budíky v prodejnách Před Rohem a Za Rohem. Pan Tik tvrdil, že Před Rohem prodali o 30 budíků více než Za Rohem, zatímco pan Tak tvrdil, že Před Rohem prodali třikrát více budíků než Za Rohem. Nakonec se ukázalo, že Tik i Tak měli pravdu. Kolik budíků prodali v obou prodejnách celkem? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Z Takovy informace plyne, že pokud počet budíků prodaných v prodejně Za Rohem představuje jeden díl, pak počet budíků prodaných v prodejně Před Rohem představuje tři tyto díly. Z Tikovy informace potom vyplývá, že dvěma těmto dílům odpovídá 30 budíků. Počet budíků v obou prodejnách odpovídá čtyřem dílům, celkem tedy prodali $30 + 30 = 60$ budíků.

Poznámka. Jednomu dílu odpovídá 15 budíků ($30 : 2 = 15$), takže v prodejně Za Rohem bylo prodáno 15 budíků. V prodejně Před Rohem prodali 45 budíků, protože $3 \cdot 15 = 45$. V obou prodejnách pak prodali celkem $15 + 45 = 60$ budíků.

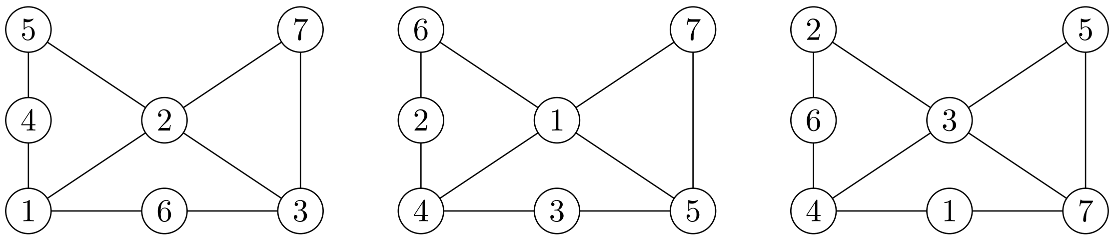
Z5–I–5

Do kroužků na obrázku doplňte čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6 a 7 tak, aby součet čísel na každé vyznačené linii byl stejný. Žádné číslo přitom nesmí být použito víckrát.



(*M. Smitková*)

Možné řešení. Zkoušením nacházíme tato tři řešení:



Zkoušení můžeme s výhodou začínat např. vyplněním dvou kroužků na svislé linii vpravo. Jako jediná obsahuje pouze dvě políčka, proto do nich patří spíše větší čísla.

Hodnocení. I jediné správné řešení bez komentáře ohodnoťte „výborně“.

Poznámka. Součet všech použitých čísel je $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$. Všimneme si kroužku v levém dolním rohu. Vychází z něj tři úsečky, na každé z nich leží další dva kroužky. Tím máme spojeno všech sedm kroužků.

Zjistíme, že číslo v levém dolním rohu nemůže být libovolné: Součet čísel ve zbylých dvou kroužcích na každé ze tří zmiňovaných linií musí být stejný. Trojnásobek tohoto součtu je proto stejný jako rozdíl mezi 28 a číslem v levém dolním rohu. Proto v levém dolním rohu může být jedině 1, 4 nebo 7.

Potom součet zbylých dvou čísel na zmiňovaných liniích je po řadě 9, 8 nebo 7, a součet všech čísel na jedné linii je po řadě 10, 12 nebo 14. Na základě těchto součtů rozdělíme zbylá čísla do dvojic a z každé dvojice vybereme jedno tak, aby součet těchto tří vybraných čísel byl rovněž 10, 12 nebo 14. Tato tři čísla budou ležet na zatím nevybrané úhlopříčce. Podobným způsobem vybereme dvojici čísel na pravou stranu čtverce. Tak získáváme výše uvedená tři řešení a zároveň máme ověřeno, že žádné další řešení už není.

Z5–I–6

Paní Široká čekala večer hosty. Nejprve pro ně připravila 25 chlebíčků. Pak spočítala, že by si každý host mohl vzít dva, tři by se však na všechny nedostaly. Řekla si, že kdyby vyrobila ještě 10 chlebíčků, mohl by si každý host vzít tři, ale čtyři ne každý. To jí přišlo stále málo. Nakonec uchystala dohromady 52 chlebíčků. Každý host by si tedy mohl vzít čtyři chlebíčky, ale pět by se na všechny nedostalo. Kolik hostů paní Široká očekávala? Ona sama drží dietu a večer nikdy nejí. (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Nejprve pracujme s částí zadání, kde se uvažuje o 25 chlebíčcích. Podle ní paní Široká očekávala nejvýše 12 hostů, protože $25 : 2 = 12$, zbytek 1, což znamená, že 12 lidí by si mohlo vzít po dvou chlebíčcích, pak by však zbyl pouze jediný. Zde též zjišťujeme, že paní Široká čekala více než 8 hostů, protože $25 : 3 = 8$, zbytek 1, což znamená, že při 8 hostech by si všichni mohli vzít po třech chlebíčcích. Zatím tedy připadá v úvahu, že mělo přijít 9, 10, 11 nebo 12 hostů.

Teď uvažujme pouze o části zadaní, v níž se hovoří o 35 chlebíčcích. Určíme, že paní Široká počítala maximálně s 11 hosty, jelikož $35 : 3 = 11$, zbytek 2, a více než s 8 hosty, jelikož $35 : 4 = 8$, zbytek 3. Tedy paní Široká mohla čekat 9, 10 nebo 11 hostů.

Dále pracujme jen s rozvahou nad 52 chlebíčky. Podle ní paní Široká čekala nejvýše 13 hostů, protože $52 : 4 = 13$, a přitom více než 10 hostů, protože $52 : 5 = 10$, zbytek 2. Počítala tedy s 11, 12 nebo 13 hosty.

Vidíme, že se všemi údaji v zadání se shoduje jediný počet hostů, a to 11.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním odstavci předchozího řešení určíme, že paní Široká mohla očekávat 9, 10, 11 nebo 12 hostů. Pro každý počet zjistíme, zda odpovídá i dalším údajům v zadání.

9 hostů: Při 35 chlebíčcích by si všichni mohli vzít po třech chlebíčcích a nikoli po čtyřech, neboť $9 \cdot 3 < 35$ a $9 \cdot 4 > 35$. Při 52 chlebíčcích by si každý mohl vzít čtyři chlebíčky, ale dokonce i pět, protože $9 \cdot 4 < 52$ i $9 \cdot 5 < 52$. Tento počet hostů zavrhujeme.

10 hostů: Při 35 chlebíčcích by si všichni mohli vzít po třech chlebíčcích a nikoli po čtyřech, poněvadž $10 \cdot 3 < 35$ a $10 \cdot 4 > 35$. Při 52 chlebíčcích by si každý mohl vzít čtyři chlebíčky, ale dokonce i pět, protože $10 \cdot 4 < 52$ i $10 \cdot 5 < 52$. Tento počet hostů též zavrhujeme.

11 hostů: Při 35 chlebíčcích by si všichni mohli vzít po třech chlebíčcích a nikoli po čtyřech, protože $11 \cdot 3 < 35$ a $11 \cdot 4 > 35$. Při 52 chlebíčcích by si všichni mohli vzít po čtyřech chlebíčcích a nikoli po pěti, jelikož $11 \cdot 4 < 52$ a $11 \cdot 5 > 52$. Tento počet hostů odpovídá celému zadání.

12 hostů: Při 35 chlebíčcích by si nemohli všichni vzít po třech chlebíčcích, protože $12 \cdot 3 > 35$. Tento počet hostů zavrhujeme.

Paní Široká čekala 11 hostů.