60. ročník Matematické olympiády

I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Součin číslic libovolného vícemístného čísla je vždy menší než toto číslo. Pokud počítáme součin číslic daného vícemístného čísla, potom součin číslic tohoto součinu, poté znova součin číslic nového součinu atd., nutně po nějakém počtu kroků dospějeme k jednomístnému číslu. Tento počet kroků nazýváme *perzistence* čísla. Např. číslo 723 má perzistenci 2, neboť $7 \cdot 2 \cdot 3 = 42$ (1. krok) a $4 \cdot 2 = 8$ (2. krok).

1. Najděte největší liché číslo, které má navzájem různé číslice a perzistenci 1.
2. Najděte největší sudé číslo, které má navzájem různé nenulové číslice a perzistenci 1.
3. Najděte nejmenší přirozené číslo, které má perzistenci 3.

(*S. Bednářová*)

Možné řešení. 1. V zadání není řečeno, že v tomto případě nesmíme použít nulu. Je-li jedna z číslic nulová, znamená to, že součin v prvním kroku je rovněž nula a tedy perzistence je 1. Stačí tedy sestavit největší liché číslo s navzájem různými číslicemi; tím je 9 876 543 201.

2. Tentokrát nulu použít nesmíme. Znamená to, že ciferný součin hledaného čísla musí být číslo jednomístné, přičemž se snažíme získat co největší počet navzájem různých činitelů (počet činitelů pak určuje počet číslic tohoto čísla, tedy čím více činitelů, tím vyšší číslo). Uvažujme tedy všechny možné rozklady jednomístných čísel na součiny přirozených čísel.

Protože hledáme sudé číslo, potřebujeme, aby alespoň jeden činitel ciferného součinu byl sudé číslo. To znamená, že ciferný součin je rovněž sudé číslo, takže se při hledání rozkladů stačí omezit na čísla 2, 4, 6 a 8. Dále se můžeme zaměřit pouze na rozklady, jejichž činitelem je i 1. Příslušná čísla jsou vždy o jeden řád vyšší než čísla odpovídající rozkladům bez 1.

- $2 = 1 \cdot 2$, možnosti: 12,
- $4 = 1 \cdot 4$, možnosti: 14,
- $4 = 1 \cdot 2 \cdot 2$, nelze (stejní činitelé),
- $6 = 1 \cdot 6$, možnosti: 16,
- $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$, možnosti: 132, 312,
- $8 = 1 \cdot 8$, možnosti: 18,
- $8 = 1 \cdot 2 \cdot 4$, možnosti: 124, 142, 214, 412.

Z nalezených možností je nejvyšší číslo 412.

3. Tento úkol můžeme řešit tak, že postupně procházíme vícemístná čísla počínaje nejmenším (tj. 10) a zjišťujeme jejich perzistenci. První nalezené číslo s perzistencí 3 je hledané číslo.

Dvojmístná čísla obsahující číslici 1 nebo 0 mají perzistenci 1, protože příslušný ciferný součin je nejvýše 9. Podobně dvojmístná čísla obsahující číslici 2 mají perzistenci nejvýše 2, protože příslušný ciferný součin je nejvýše 18. Na základě těchto úvah stačí začít prověřovat přirozená čísla až od 33:

- 33, $3 \cdot 3 = 9$, perzistence 1,
- 34, $3 \cdot 4 = 12$, $1 \cdot 2 = 2$, perzistence 2,

- 35, $3 \cdot 5 = 15$, $1 \cdot 5 = 5$, perzistence 2,
- 36, $3 \cdot 6 = 18$, $1 \cdot 8 = 8$, perzistence 2,
- 37, $3 \cdot 7 = 21$, $2 \cdot 1 = 2$, perzistence 2,
- 38, $3 \cdot 8 = 24$, $2 \cdot 4 = 8$, perzistence 2,
- 39, $3 \cdot 9 = 27$, $2 \cdot 7 = 14$, $1 \cdot 4 = 4$, perzistence 3.

Nejmenší přirozené číslo s perzistencí 3 je 39.

Z7–I–2

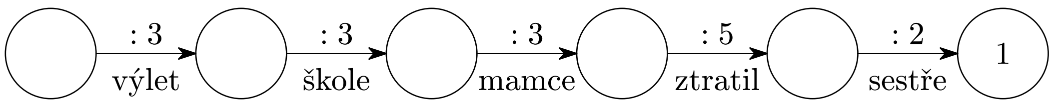
Ondra na výletě utratil $\frac{2}{3}$ peněz a ze zbytku dal ještě $\frac{2}{3}$ na školu pro děti z Tibetu. Za $\frac{2}{3}$ nového zbytku ještě koupil malý dárek pro maminku. Z děravé kapsy ztratil $\frac{4}{5}$ zbylých peněz, a když ze zbylých dal půlku malé sestřičce, zůstala mu právě jedna koruna. S jakým obnosem šel Ondra na výlet? (*M. Volfová*)

Možné řešení. Počet Ondrových korun před výletem označíme x.

- Ondra na výletě utratil $\frac{2}{3}$ peněz, zbylo mu tedy $\frac{1}{3}x$ korun.
- Na školu v Tibetu dal $\frac{2}{3}$ zbylých peněz, zbylo mu $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}x = \frac{1}{9}x$ korun.
- Dárek mamince stál $\frac{2}{3}$ zbytku, zbylo mu $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}x = \frac{1}{27}x$ korun.
- Z toho ztratil $\frac{4}{5}$, zbylo mu $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{27}x = \frac{1}{135}x$ korun.
- Půlku zbylých peněz dal sestře a jemu zůstala druhá půlka, tj. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{135}x = \frac{1}{270}x$, a to byla 1 koruna.

Je-li $\frac{1}{270}x = 1$, je $x = 270$. Ondra šel na výlet s obnosem 270 korun.

Jiné řešení. Úlohu je možné řešit také odzadu podle následujícího schématu:



Postupně, zprava doleva, dostáváme následující hodnoty: $1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 5 = 10$, $10 \cdot 3 = 30$, $30 \cdot 3 = 90$ a $90 \cdot 3 = 270$. Ondra měl před výletem 270 korun.

Z7–I–3

Šárka prohlásila:

„Jsme tři sestry, já jsem nejmladší, Líba je starší o tři roky a Eliška o osm. Naše mamka ráda slyší, že nám všem (i s ní) je v průměru 21 let. Přitom když jsem se narodila, bylo mamce už 29.“

Před kolika lety se Šárka narodila? (*M. Volfová*)

Možné řešení. Pokud věk Šárky v letech označíme x, potom Líbě je $x + 3$, Elišce $x + 8$ a mamce $x + 29$ let. Věkový průměr všech je 21 let, tzn.

$$(x + (x + 3) + (x + 8) + (x + 29)) : 4 = 21,$$

po úpravě

$$\begin{aligned} 4x + 40 &= 84, \\ x &= 11. \end{aligned}$$

Šárka se narodila před 11 lety.