60. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Martin má na papíře napsáno pětimístné číslo s pěti různými číslicemi a následujícími vlastnostmi:

- škrtnutím druhé číslice zleva (tj. číslice na místě tisíců) dostane číslo, které je dělitelné dvěma,
- škrtnutím třetí číslice zleva dostane číslo, které je dělitelné třemi,
- škrtnutím čtvrté číslice zleva dostane číslo, které je dělitelné čtyřmi,
- škrtnutím páté číslice zleva dostane číslo, které je dělitelné pěti,
- neškrtne-li žádnou číslici, má číslo dělitelné šesti.

Které největší číslo může mít Martin napsáno na papíře? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Číslice Martinova čísla označíme postupně a, b, c, d, e, číslo z nich utvořené $\overline{abcde}$. Nyní si postupně rozebereme všech pět podmínek:

1. číslo $\overline{acde}$ je dělitelné dvěma, tedy číslice e je 0, 2, 4, 6 nebo 8,
2. číslo $\overline{abde}$ je dělitelné třemi, tedy součet $a+b+d+e$ je dělitelný třemi,
3. číslo $\overline{abce}$ je dělitelné čtyřmi, tedy číslo $\overline{ce}$ je dělitelné čtyřmi,
4. číslo $\overline{abcd}$ je dělitelné pěti, tedy číslice d je 0 nebo 5,
5. číslo $\overline{abcde}$ je dělitelné šesti, což znamená, že je dělitelné dvěma a třemi zároveň, tj. číslo e je sudé (víme již z 1. podmínky) a součet $a+b+c+d+e$ je dělitelný třemi.

Dáme-li dohromady druhou a pátou podmínku, dostáváme, že číslo c je rovněž dělitelné třemi. Číslice c je proto 0, 3, 6 nebo 9. Vidíme, že na číslice c, d, e jsou kladeny samostatné podmínky, zatímco na číslice a a b ne. Při hledání největšího vyhovujícího čísla budeme postupně prověřovat čísla vytvořená podle následujících zásad: číslo budeme vytvářet zleva a vždy zvolíme největší možnou číslici takovou, aby číslice byly navzájem různé, aby platily samostatné podmínky pro číslice c, d, e a aby nevzniklo číslo již prověřené. K rozhodnutí, zda takto vytvořené číslo splňuje všechny zadané podmínky, pak stačí ověřit druhou a třetí podmínku:

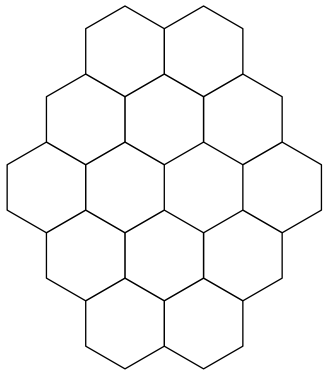
- 98 654: součet $9+8+5+4=26$ není dělitelný třemi (2. podmínka není splněna),
- 98 652: součet $9+8+5+2=24$ je dělitelný třemi (2. podmínka splněna), ale 62 není dělitelné čtyřmi (3. podmínka není splněna),
- 98 650: součet $9+8+5+0=22$ není dělitelný třemi (2. podmínka není splněna),
- 98 604: součet $9+8+0+4=21$ je dělitelný třemi (2. podmínka splněna) a 64 je dělitelné čtyřmi (3. podmínka také splněna).

Číslo 98 604 je tedy největší číslo, které může mít Martin napsáno na papíře.

Z8–I–2

Karel se snažil do prázdných polí na obrázku vepsat přirozená čísla od 1 do 14 tak, aby žádné číslo nebylo použito víckrát a součet všech čísel v každé přímé linii byl stejný. Po chvíli si uvědomil, že to není možné. Jak byste Karlovo pozorování zdůvodnili vy? (Přímou linií rozumíme skupinu všech sousedících políček, jejichž středy leží na jedné přímce.)

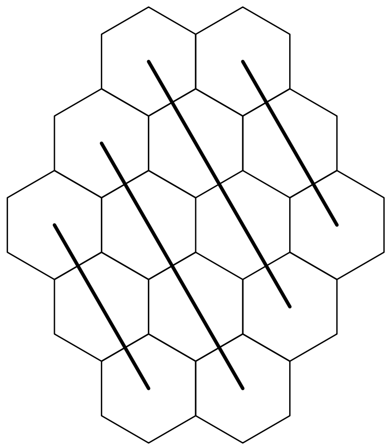
(*S. Bednářová*)



Možné řešení. Součet všech čísel, která máme do obrázku vepsat, je

$$1 + 2 + \ldots + 13 + 14 = 7 \cdot 15 = 105.$$

Přímky v následujícím obrázku určují v obrazci čtyři přímé linie tak, že každé pole patří právě jedné linii. Součet všech čísel na každé vyznačené linii by měl být stejný a čtyřnásobek tohoto součtu má být 105. Jenže číslo 105 není dělitelné čtyřmi, což znamená, že vepsat čísla do polí požadovaným způsobem skutečně nelze.



Jiné řešení. Předpokládejme, že součet všech čísel v každé přímé linii může být stejný, a označme jej p. V obrazci můžeme pomocí pěti vodorovných přímek určit pět přímých linií tak, že každé pole bude patřit právě jedné linii. Z toho usuzujeme, že součet všech doplněných čísel je $5p$. Výše uvedený obrázek ukazuje jiné rozdělení obrazce na přímé linie, podle něhož součet všech doplněných čísel je $4p$. To je ovšem spor, proto vepsat čísla do polí požadovaným způsobem nelze.

Z8–I–3

Cena knížky „Nové hádanky“ byla snížena o 62,5 %. Matěj zjistil, že obě ceny (před snížením i po něm) jsou dvojmístná čísla a dají se vyjádřit stejnými číslicemi, jen v různém pořadí. O kolik Kč byla knížka zlevněna? (*M. Volfová*)

Možné řešení. Původní cenu knížky v Kč budeme psát ve tvaru $10a + b$, kde a a b jsou neznámé nenulové číslice. Po zlevnění byla cena knížky $10b + a$. Snížení ceny bylo o 62,5 %, tedy na 37,5 %, což znamená, že

$$\frac{37{,}5}{100} \cdot (10a + b) = 10b + a.$$

Vzhledem k rovnosti $\frac{37{,}5}{100} = \frac{75}{200} = \frac{3}{8}$ předchozí vztah upravíme:

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} \cdot (10a + b) &= 10b + a, \\ 30a + 3b &= 80b + 8a, \\ 22a &= 77b, \\ 2a &= 7b. \end{aligned}$$

Jediná jednomístná přirozená čísla vyhovující této rovnosti jsou $a = 7$ a $b = 2$. Původní cena byla 72 Kč, po zlevnění 27 Kč, knížka byla zlevněna o 45 Kč.