I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Pan Vlk čekal na zastávce před školou na autobus. Z okna slyšel slova učitele:

„Jaký povrch může mít pravidelný čtyřboký hranol, víte-li, že délky všech jeho hran jsou v centimetrech vyjádřeny celými čísly a že jeho objem je...“

Toto důležité číslo pan Vlk neslyšel, protože zrovna projelo okolo auto. Za chvíli slyšel žáka hlásícího výsledek $918\,\mathrm{cm}^2$. Učitel na to řekl:

„Ano, ale úloha má celkem čtyři řešení. Hledejte dál.“

Více se pan Vlk už nedozvěděl, neboť nastoupil do svého autobusu. Protože matematika byla vždy jeho hobby, vytáhl si v autobuse tužku a papír a po čase určil i zbylá tři řešení učitelovy úlohy. Spočítejte je i vy. (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Proměnné a a v jsou přirozená čísla a představují hranu podstavy pravidelného čtyřbokého hranolu a jeho výšku. Pro rozměry, které uvažoval přihlásivší se žák, platí

$$918 = 2a^2 + 4av = 2a \cdot (a + 2v),$$

po vydělení dvěma dostaneme

$$459 = a \cdot (a + 2v).$$

Budeme hledat všechny dvojice a, v, které odpovídají tomuto vztahu. Určíme tedy všechny možné rozklady čísla 459 ($459 = 3^3 \cdot 17$) na součin dvou přirozených čísel, z nichž menší bude a a větší bude $a + 2v$. Následující tabulka ukazuje, že takové rozklady existují čtyři a každý vede k celočíselnému v. Pro všechny nalezené dvojice a, v pak spočítáme objem, který by učitel musel zadat, a jeho prvočíselný rozklad:

	a	$a+2v$	v	$a^2 \cdot v$
1. možnost	1	459	229	$1^2 \cdot 229 = 229$
2. možnost	3	153	75	$3^2 \cdot 75 = 3^3 \cdot 5^2$
3. možnost	9	51	21	$9^2 \cdot 21 = 3^5 \cdot 7$
4. možnost	17	27	5	$17^2 \cdot 5 = 17^2 \cdot 5$

Učitel prozradil, že zadaný objem vede ke čtyřem řešením. U každého objemu v tabulce určíme, ke kolika řešením vede, tedy pro každý objem najdeme všechna možná a:

	$a^2 \cdot v$	možná a
1. možnost	229	1
2. možnost	$3^3 \cdot 5^2$	1, 3, 5, 15
3. možnost	$3^5 \cdot 7$	1, 3, 9
4. možnost	$17^2 \cdot 5$	1, 17

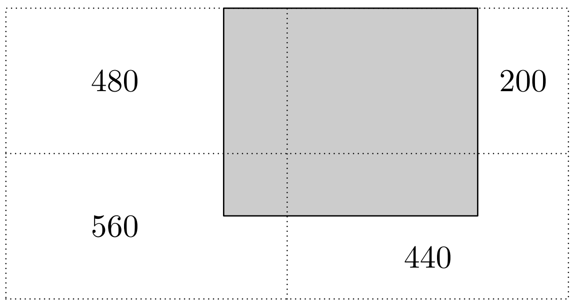
Vidíme, že jedině 2. možnost vede ke čtyřem hranolům. Učitel tedy zadal objem $3^3 \cdot 5^2 = 675\,(\mathrm{cm}^3)$ a první žák uvažoval tyto rozměry: $a = 3\,\mathrm{cm}$, $v = 75\,\mathrm{cm}$. Níže uvádíme, jaké další rozměry hranolu měli žáci nalézt a jaký povrch z nich měli vypočítat:

a	1	5	15
v	675	27	3
$2a^2 + 4av$	2 702	590	630

Učitel čekal na tato další tři řešení: $590\,\mathrm{cm}^2$, $630\,\mathrm{cm}^2$ a $2\,702\,\mathrm{cm}^2$.

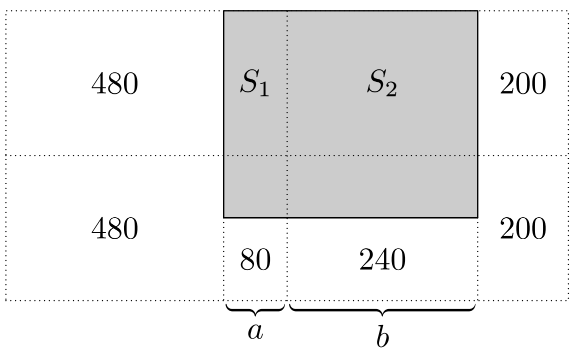
Z9–I–2

Na obrázku jsou tečkovanou čarou znázorněny hranice čtyř stejně velkých obdélníkových parcel. Šedou barvou je vyznačena zastavěná plocha. Ta má tvar obdélníku, jehož jedna strana tvoří zároveň hranice parcel. Zapsaná čísla vyjadřují obsah nezastavěné plochy na jednotlivých parcelách, a to v m^2. Vypočítejte obsah celkové zastavěné plochy.



(L. Šimůnek)

Možné řešení. Na obrázku prodloužíme svislé hranice zastavěné plochy, čímž na obou dolních parcelách rozdělíme volnou plochu na dvě části. Obsahy nově vzniklých obdélníků snadno odvodíme:



Obdélníky s obsahy $80\,\mathrm{m}^2$ a $240\,\mathrm{m}^2$ mají společnou stranu. Proto zbylé strany obdélníků, v obrázku označené a a b, musejí mít délky ve stejném poměru, v jakém jsou obsahy obdélníků:

$$\frac{a}{b} = \frac{80}{240} = \frac{1}{3},$$

tedy $b = 3a$. V parcelách, které jsou na obrázku nahoře, označíme obsahy zastavěných částí S_1 a S_2. Jde o dva obdélníky s jednou společnou stranou a jejich další strany mají délky a a $3a$. Obsahy obdélníků musejí být v témže poměru jako tyto délky, tedy $S_2 = 3S_1$. Parcely na obrázku nahoře mají stejný obsah, proto

$$480 + S_1 = 3S_1 + 200,$$

po úpravě dostaneme $S_1 = 140\,(\mathrm{m}^2)$. Obsah jedné parcely je $480 + 140 = 620\,(\mathrm{m}^2)$ a obsah všech čtyř je $4 \cdot 620 = 2\,480\,(\mathrm{m}^2)$. Z něj odečteme obsahy všech volných ploch a dostaneme obsah celkové zastavěné plochy:

$$2\,480 - 480 - 200 - 560 - 440 = 800\,(\mathrm{m}^2).$$

Z9–I–3

Vlčkovi lisovali jablečný mošt. Měli ho ve dvou stejně objemných soudcích, v obou téměř stejné množství. Kdyby z prvního přelili do druhého 1 litr, měli by v obou stejně, ale to by ani jeden soudek nebyl plný. Tak raději přelili 9 litrů z druhého do prvního. Pak byl první soudek úplně plný a mošt v druhém zaplňoval právě třetinu objemu. Kolik litrů moštu vylisovali, jaký byl objem soudků a kolik moštu v nich bylo původně?

(*M. Volfová*)

Možné řešení. Označme počet litrů v prvním soudku před přeléváním x, ve druhém y. Po přelití jednoho litru by bylo v prvním soudku $x - 1$ litrů, ve druhém $y + 1$ litrů a platilo by

$$x - 1 = y + 1.$$

Po přelití 9 litrů bylo v prvním soudku $x + 9$ litrů a byl plný, ve druhém $y - 9$ litrů, což tvořilo třetinu objemu soudku, tedy třetinu toho, co bylo v prvním soudku. Proto

$$x + 9 = 3 \cdot (y - 9).$$

Z první rovnice vyjádříme $x = y + 2$ a dosadíme do druhé: $y + 2 + 9 = 3y - 27$. Po úpravě dostáváme $y = 19$ a $x = 21$.

V prvním soudku bylo původně 21 litrů a ve druhém 19 litrů moštu, Vlčkovi celkem vylisovali 40 litrů moštu. Objem každého z obou soudků byl 30 litrů.

Z9–I–4

Pan Rychlý a pan Louda ve stejnou dobu vyšli na tutéž turistickou túru, jen pan Rychlý ji šel shora z horské chaty a pan Louda naopak od autobusu dole v městečku na chatu nahoru. V 10 hodin se na trase míjeli. Pan Rychlý spěchal a již ve 12 hodin byl v cíli. Naopak pan Louda postupoval pomalu, a tak dorazil k chatě až v 18 hodin. V kolik hodin pánové vyrazili na cestu, víme-li, že každý z nich šel celou dobu svou stálou rychlostí? (*M. Volfová*)

Možné řešení. Označme rychlost (v km/h) pana Rychlého v_R a pana Loudy v_L. Dobu (v h) od vyjití do jejich setkání označíme x. Do setkání ušel pan Rychlý shora od chaty $x \cdot v_R$ (km), pan Louda zdola od autobusu $x \cdot v_L$ (km). Pan Rychlý pak šel ještě 2 h dolů k autobusu, ušel $2 \cdot v_R$ (km), pan Louda šel ještě 8 h k chatě nahoru, ušel $8 \cdot v_L$ (km).

Porovnáním odpovídajících vzdáleností získáme dvě rovnice: vzdálenost od místa, kde se pánové potkali, k autobusu je $x \cdot v_L = 2 \cdot v_R$ (km), k chatě $8 \cdot v_L = x \cdot v_R$ (km). Odtud vyjádříme

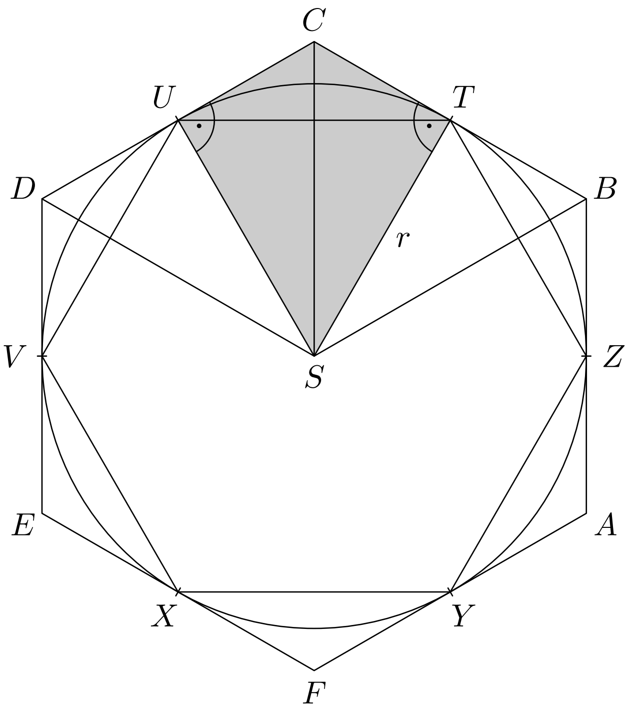
$$\frac{v_L}{v_R} = \frac{2}{x} = \frac{x}{8},$$

tedy $x^2 = 16$ a $x = 4$. Od vyjití do setkání v 10 h šli oba pánové 4 hodiny, na cestu tedy vyrazili v 6 hodin.

Z9–I–5

Kružnici se středem S a poloměrem 12 cm jsme opsali pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ a vepsali pravidelný šestiúhelník $TUVXYZ$ tak, aby bod T byl středem strany BC. Vypočítejte obsah a obvod čtyřúhelníku $TCUS$. (*M. Krejčová*)

Možné řešení. Kružnici popsanou v zadání nazvěme k a její poloměr r, přičemž platí $r = 12$ cm. Její vztahy k šestiúhelníkům lze interpretovat také tak, že kružnice k je vepsána pravidelnému šestiúhelníku $ABCDEF$ a opsána pravidelnému šestiúhelníku $TUVXYZ$, viz obrázek. Dále si uvědomme, že při sestrojování pravidelného šestiúhelníku $TUVXYZ$ můžeme podmínce v zadání, aby vrchol T ležel ve středu strany BC, vyhovět proto, že právě ve středu strany BC je bod dotyku šestiúhelníku $ABCDEF$ a kružnice k jemu vepsané. Proto i ostatní vrcholy šestiúhelníku $TUVXYZ$ leží ve středech stran šestiúhelníku $ABCDEF$.



Při řešení úlohy budeme vycházet ze známé vlastnosti pravidelného šestiúhelníku: jakékoli dva jeho sousední vrcholy a střed kružnice jemu opsané (resp. vepsané) tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. Tedy trojúhelníky CSB a CSD jsou rovnostranné, navíc mají společnou stranu CS, podle které jsou osově souměrné. Bod T je středem strany BC trojúhelníku CSB, a proto je i patou jeho výšky kolmé na stranu BC. Trojúhelník CST je tudíž pravoúhlý. Bod U, který je středem strany DC, je osově souměrný k T podle CS, tudíž trojúhelníky CST a CSU jsou shodné.

K dořešení úlohy stačí znát velikost $|TC|$, kterou vypočítáme podle Pythagorovy věty v trojúhelníku CST (přitom použijeme $|CS| = 2|TC|$):

$$\begin{aligned} |CS|^2 &= |ST|^2 + |TC|^2, \\ 4|TC|^2 &= r^2 + |TC|^2, \\ 3|TC|^2 &= r^2, \\ |TC| &= \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{r\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Čtyřúhelník $TCUS$ je tvořen dvěma shodnými trojúhelníky, určíme jeho obsah:

$$S_{TCUS} = 2 \cdot S_{CST} = |TC| \cdot |ST| = \frac{r\sqrt{3}}{3} \cdot r = \frac{r^2\sqrt{3}}{3}.$$

Obvod čtyřúhelníku $TCUS$ je

$$o_{TCUS} = 2(|TC| + |ST|) = 2\left(\frac{r\sqrt{3}}{3} + r\right) = 2r\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right).$$

Po dosazení $r = 12\,\mathrm{cm}$ dojdeme k výsledkům:

$$\begin{aligned} S_{TCUS} &= 48\sqrt{3} \doteq 83{,}1\,(\mathrm{cm}^2), \\ o_{TCUS} &= 8\sqrt{3} + 24 \doteq 37{,}9\,(\mathrm{cm}). \end{aligned}$$

Z9–I–6

Petr a Pavel česali v sadě jablka a hrušky. V pondělí snědl Petr o 2 hrušky více než Pavel a o 2 jablka méně než Pavel. V úterý Petr snědl o 4 hrušky méně než v pondělí. Pavel snědl v úterý o 3 hrušky více než Petr a o 3 jablka méně než Petr. Pavel snědl za oba dny 12 jablek a v úterý snědl stejný počet jablek jako hrušek. V úterý večer oba chlapci zjistili, že počet jablek, která společně za oba dny snědli, je stejně velký jako počet společně snědených hrušek. Kolik jablek snědl Petr v pondělí a kolik hrušek snědl Pavel v úterý?

(*L. Hozová*)

Možné řešení. Označme x, y odpovídající počty hrušek a jablek, jež v pondělí Pavel snědl. Podle zadání postupně a trpělivě sestavíme následující tabulku:

	pondělí	úterý
Pavel hrušek	x	$x+1$
Pavel jablek	y	$12-y$
Petr hrušek	$x+2$	$x-2$
Petr jablek	$y-2$	$15-y$

Při vyplňování tabulky jsme však zatím nepoužili následující informace:

a) Pavel snědl v úterý stejný počet jablek jako hrušek,
b) počet všech společně snědených jablek je stejný jako počet snědených hrušek.

Podle informace b) sestavíme rovnici, po jejíchž úpravách získáme hodnotu x:

$$\begin{aligned} y+(12-y)+(y-2)+(15-y) &= x+(x+1)+(x+2)+(x-2), \\ 25 &= 4x+1, \\ x &= 6. \end{aligned}$$

Podle informace a) též sestavíme rovnici, upravíme ji a dosadíme:

$$\begin{aligned} x+1 &= 12-y, \\ y &= 11-x=5. \end{aligned}$$

Dosazením do příslušných polí tabulky zjistíme, že Petr snědl v pondělí 3 jablka a Pavel snědl v úterý 7 hrušek.

Pro kontrolu uvádíme tabulku se všemi dosazenými hodnotami:

	pondělí	úterý
Pavel hrušek	6	**7**
Pavel jablek	5	7
Petr hrušek	8	4
Petr jablek	**3**	10

Poznámka. Při sestavování údajů v tabulce lze jistě postupovat různě a nepoužité informace mohou být různé od těch v předchozím postupu. Při stejném značení neznámých tak můžeme získat jiné dvě rovnice, jež však při správném počítání vedou ke stejnému řešení. Navíc neznámé lze také volit různě, nicméně vždy jsou potřeba alespoň dvě. Stejný počet nepoužitých informací pak určuje soustavu rovnic, kterou následně řešíme.

Jiné řešení. Pokud označíme x počet jablek, která Petr snědl v pondělí, a y počet hrušek, které Pavel snědl v úterý, pak tabulka může vypadat takto:

	pondělí	úterý
Pavel hrušek	$y-1$	y
Pavel jablek	$12-y$	y
Petr hrušek	$y+1$	$y-3$
Petr jablek	x	$y+3$

Přitom jsme nepoužili následující informace:

a) v pondělí snědl Petr o 2 jablka méně než Pavel,
b) počet všech společně snědených jablek je stejný jako počet snědených hrušek.

Odpovídající rovnice (po jednoduché úpravě) jsou:

$$\begin{aligned} x+y&=10,\\ -x+3y&=18, \end{aligned}$$

a jediným řešením této soustavy je $x=3$ a $y=7$.