

II. kolo kategorie Z5

Z5–II–1

Mirek vypisoval za sebou do řady výsledky malé násobilky sedmi od 7 do 70. Vypisoval je postupně od nejmenšího po největší a nepsal mezi nimi čárky ani mezery. V takhle vzniklé řadě číslic škrtnl jedenáct z těchto číslic. Které největší a které nejmenší číslo mohl dostat?
(*M. Petrová*)

Možné řešení. Mirek získal tuto řadu číslic:

7142128354249566370.

Škrtnutím jedenácti číslic mu tedy muselo zůstat osmimístné číslo. Má-li být takové číslo co největší (resp. nejmenší), musí mít na prvním místě zleva, případně na prvních místech zleva, co největší (resp. nejmenší) číslice.

a) Největší číslo. Je-li na prvním místě zleva menší číslice než na druhém místě zleva, první číslici škrtneme. Opět porovnáme první dvě číslice zleva, a je-li první menší, škrtneme ji atd. Je-li na prvním místě zleva větší číslice než na druhém místě zleva, žádnou číslici neškrtneme a způsobem popsaným výše porovnáme druhou a třetí číslici zleva. Po každé škrtnuté číslici začínáme kontrolou dvojic číslic úplně zleva. Postup opakujeme tak dlouho, dokud neškrtneme celkem 11 číslic.

<u>7</u> 142128354249566370	neškrtnáme nic
7 <u>1</u> 42128354249566370	škrtnáme 1 (1. škrtnutá číslice)
7 <u>4</u> 2128354249566370	neškrtnáme nic
7 <u>4</u> 2128354249566370	neškrtnáme nic
74 <u>2</u> 128354249566370	neškrtnáme nic
742 <u>1</u> 28354249566370	škrtnáme 1 (2. škrtnutá číslice)

Další postup je analogický; uvádíme proto jen okamžiky, kdy vyškrtnáme nějaké číslice:

742 <u>2</u> 8354249566370	škrtnáme 2 (3. škrtnutá číslice)
742 <u>8</u> 354249566370	škrtnáme 2 (4. škrtnutá číslice)
74 <u>8</u> 354249566370	škrtnáme 4 (5. škrtnutá číslice)
7 <u>8</u> 354249566370	škrtnáme 7 (6. škrtnutá číslice)
8 <u>3</u> 54249566370	škrtnáme 3 (7. škrtnutá číslice)
854 <u>2</u> 49566370	škrtnáme 2 (8. škrtnutá číslice)
854 <u>4</u> 9566370	škrtnáme 4 (9. škrtnutá číslice)
854 <u>9</u> 566370	škrtnáme 4 (10. škrtnutá číslice)
859 <u>5</u> 66370	škrtnáme 5 (11. škrtnutá číslice)

Největší číslo, které mohl Mirek získat, je 89 566 370.

b) Nejmenší číslo. Postupujeme podobně jako při hledání největšího čísla; škrtneme naopak větší číslice:

<u>7</u> 142128354249566370	škrtneme 7 (1. škrtnutá číslice)
<u>1</u> 42128354249566370	neškrtneme nic
1 <u>4</u> 2128354249566370	škrtneme 4 (2. škrtnutá číslice)

Dále jen zkráceně:

<u>12</u> 128354249566370	škrtneme 2 (3. škrtnutá číslice)
1 <u>12</u> 8354249566370	škrtneme 8 (4. škrtnutá číslice)
11 <u>23</u> 54249566370	škrtneme 5 (5. škrtnutá číslice)
112 <u>34</u> 249566370	škrtneme 4 (6. škrtnutá číslice)
112 <u>32</u> 49566370	škrtneme 3 (7. škrtnutá číslice)
1122 <u>4</u> 9566370	škrtneme 9 (8. škrtnutá číslice)
11224 <u>5</u> 66370	škrtneme 6 (9. škrtnutá číslice)
112245 <u>6</u> 370	škrtneme 6 (10. škrtnutá číslice)
112245 <u>3</u> 70	škrtneme 5 (11. škrtnutá číslice)

Nejmenší číslo, které mohl Mirek získat, je 11 224 370.

Jiné řešení. Mirek získal tuto řadu číslic:

7142128354249566370.

Škrtnutím jedenácti číslic mu tedy muselo zůstat osmimístné číslo. Má-li být takové číslo co největší (resp. nejmenší), musí mít na prvních místech zleva co největší (resp. nejmenší) číslice. Místo škrtnutí přebytečných číslic budeme vybírat ty vhodné.

a) Největší číslo. Číslice 9 je v řadě pouze jedenkrát a největší vybrané číslo začínající číslicí 9 je 9566370. Toto číslo je však pouze sedmimístné, takže hledané číslo nemůže začínat číslicí 9. Nejbližší menší číslice je 8, která se v řadě vyskytuje jedenkrát a zrovna před 9. Největší vybrané osmimístné číslo je tedy 89 566 370.

b) Nejmenší číslo. Číslicí 0 začínat nemůžeme ani nehodláme. (Navíc díky tomu, že je tato číslice v řadě až na úplně posledním místě, může být ve vybraném čísle také jedině na konci, proto ji v následujících diskusích ignorujeme.) Číslice 1 je v řadě celkem dvakrát — můžeme obě vybrat jako první dvě číslice hledaného čísla, protože v řadě máme napravo od druhé číslice 1 ještě dostatek číslic pro vytvoření osmimístného čísla. Číslice 2 se vyskytuje za druhou číslicí 1 dvakrát — můžeme tyto dvě dvojky zvolit jako třetí a čtvrtou číslici hledaného čísla, protože v řadě zbývá napravo od poslední číslice 2 ještě dostatek číslic pro vytvoření osmimístného čísla. Momentálně máme 1122**** a potřebujeme doplnit poslední čtyři číslice ze zbytku řady 49566370.

Číslice 3 za poslední použitou 2 je jediná, ale použít ji nemůžeme, protože pak bychom nedoplňovali osmimístné číslo. Číslice 4 za poslední použitou 2 je jediná — vybíráme a hledáme poslední tři číslice. Nejmenší číslice za touto 4 je 3 na předpředposledním místě — když ji vybereme, poslední dvě číslice jsou již jasné. Nejmenší vybrané osmimístné číslo je tedy 11 224 370.

Poznámka. Předchozí úvahy pomocí škrtnání lze přehledně shrnout následovně.

a) Největší číslo:

~~7142128354249566370~~
~~8354249566370~~

b) Nejmenší číslo:

~~7142128354249566370~~
~~142128354249566370~~
~~1128354249566370~~
112249566370

Hodnocení. Udělte 1 bod za správně vypsanou původní řadu číslic (tj. bez škrtnání). Další 3 body udělte za nalezení prvního z čísel (největšího nebo nejmenšího), z toho 2 body za popsání způsobu škrtnání číslic a 1 bod za správný výsledek. Poslední dva body udělte za nalezení druhého z čísel, z toho 1 bod za postup a 1 bod za správný výsledek.

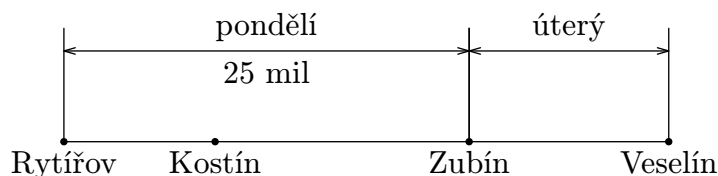
Řešení, ve kterém je stručně vysvětlen správný způsob vyhledávání škrtnaných číslic u obou čísel, považujte za správné a úplné i v případě, že není žádná škrtnaná číslice zdůvodněna samostatně. Pokud v řešení chybí jakkoli naznačený správný postup, ohodnoťte úlohu nejvýše 3 body. Domnívá-li se řešitel, že stačí vyškrtnat z celé řady číslic všechny nejmenší, resp. největší číslice, udělte mu nejvýše 1 bod (za správně vypsanou řadu číslic).

Z5–II–2

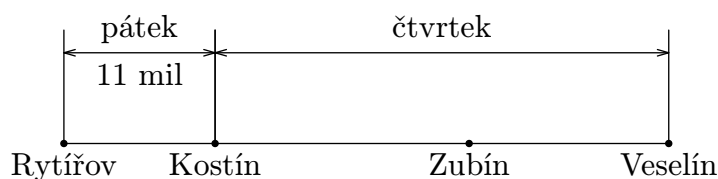
Rytíř Milivoj se chystal do Veselína na turnaj. Ten se koná ve středu. Protože mu ale cesta z Rytířova, kde bydlí, do Veselína bude trvat dva dny, vyrazil už v pondělí. Cesta vede přes další dvě města, Kostín a Zubín. První den jízdy urazil 25 mil a přenocoval v Zubíně. Druhý den, v úterý, šťastně dojel do Veselína. Turnaj s přehledem vyhrál, takže když se ve čtvrtek vracel zpátky, jel rychleji. Ujel o 6 mil více než v pondělí, přenocoval tak v Kostíně. V pátek ujel 11 mil, které mu zbývaly do Rytířova. Urči vzdálenost mezi Zubínem a Veselínem. (M. Petrová)

Možné řešení. Situaci ze zadání si nejdřív znázorníme.

Cesta na turnaj:



Cesta z turnaje:



Protože ve čtvrtek Milivoj ujel o 6 mil více než v pondělí, musel ve čtvrtek ujet z Veselína do Kostína $25 + 6 = 31$ (mil).

To znamená, že celá vzdálenost z Rytířova do Veselína měří $11 + 31 = 42$ (mil). Protože je vzdálenost mezi Rytířovem a Zubínem 25 mil, musí být vzdálenost mezi Zubínem a Veselínem $42 - 25 = 17$ (mil).

Hodnocení. 2 body za určení vzdálenosti mezi Kostínem a Veselínem; 2 body za určení vzdálenosti mezi Rytířovem a Veselínem; 2 body za určení vzdálenosti mezi Zubínem a Veselínem. Vždy udělte jeden bod za číselný údaj a druhý bod za příslušné vysvětlení. (Pokud v řešení chybí jakékoli vysvětlení postupu, udělte za tuto úlohu nejvýše 3 body.)

Poznámka. Místo počtů ve druhém odstavci lze uvažovat následovně: Protože je vzdálenost mezi Rytířovem a Zubínem 25 mil a mezi Rytířovem a Kostínem 11 mil, je vzdálenost mezi Kostínem a Zubínem $25 - 11 = 14$ (mil). Takže vzdálenost mezi Zubínem a Veselínem musí být $31 - 14 = 17$ (mil). Hodnocení v tomto případě je obdobné.

Jiné řešení. V pondělí Milivoj ujel dva úseky celé cesty: první z Rytířova do Kostína, druhý z Kostína do Zubína. Ve čtvrtek ujel rovněž dva úseky: z Kostína do Zubína a ze Zubína do Veselína. (Rytíř Milivoj je sice projel v opačném směru, ale to nemá na tuto úvahu vliv.) To znamená, že úsekem z Kostína do Zubína projel v oba tyto dny. Jestliže ale ve čtvrtek ujel o 6 mil více, musí být úsek ze Zubína do Veselína o 6 mil delší než úsek z Rytířova do Kostína. A protože z Rytířova do Kostína je to 11 mil, musí být vzdálenost mezi Zubínem a Veselínem $11 + 6 = 17$ (mil).

Hodnocení. Za porovnání pondělní a čtvrteční cesty a zdůvodnění, proč je úsek mezi Zubínem a Veselínem o 6 mil delší než úsek mezi Rytířovem a Kostínem, udělte 5 bodů (či méně podle kvality vysvětlení). Poslední 1 bod udělte za výsledný údaj 17 mil.

Z5-II-3

Lázeňský správce pan Sluníčko koupil pro lázeňské hosty 58 slunečníků. Některé byly červené a některé žluté. Červené byly baleny v krabicích po devíti kusech, zatímco žluté byly v krabicích po čtyřech kusech. Oba druhy slunečníků nakupoval po celých baleních. Kolik mohlo být žlutých slunečníků? (L. Hozová)

Možné řešení. Pomocí tabulky budeme postupovat následovně: Začneme tím, že zvolíme počet krabic s červenými slunečníky, tj. jakékoli celé číslo mezi 0 a 6 (kdyby krabic bylo 7 nebo více, bylo by jenom červených slunečníků 63 nebo více). Následně určíme, kolik červených slunečníků je v těchto krabicích, tj. devítinásobek počtu krabic. Poté vypočteme, kolik slunečníků bude žlutých, tj. od 58 odečteme počet červených slunečníků. Nakonec ještě zjistíme, kolik by mělo být krabic se žlutými slunečníky, tj. počet žlutých slunečníků vydělíme čtyřmi. V případě, že počet žlutých slunečníků není násobek čtyř, takže nemůžeme dělit čtyřmi beze zbytku, příslušné políčko proškrtneme a tato možnost k řešení úlohy nevede.

krabic s červenými slunečníky	0	1	2	3	4	5	6
červených slunečníků	0	9	18	27	36	45	54
žlutých slunečníků	58	49	40	31	22	13	4
krabic se žlutými slunečníky	—	—	10	—	—	—	1

Dostáváme dvě možnosti: Žlutých slunečníků mohlo být 40 nebo mohly být 4.

Poznámka. Můžeme postupovat také tak, že volíme počet krabic se žlutými slunečníky a dopočítáváme počty krabic s červenými slunečníky. V tomto případě však potřebujeme probrat všechny možnosti mezi 0 a 14 ($15 \cdot 4 = 60 > 58$). Dostaneme následující tabulku:

krabic se žlutými slun.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
žlutých slunečnicků	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56
červených slunečnicků	58	54	50	46	42	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2
krabic s červenými slun.	—	6	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	—

Hodnocení. 1 bod za vysvětlení postupu u jednoho zvoleného (libovolného) počtu krabic s červenými (resp. žlutými) slunečníky; 3 body za správné sestavení a doplnění tabulky nebo obdobný zápis; 2 body za nalezení obou možných počtů slunečnicků.

Jestliže řešiteli chybí z nepozornosti některý sloupec tabulky, ale jinak je jeho řešení správné i vysvětlené, udělte mu 5 bodů. Úplný postup, ale bez slovního komentáře, ohodnoťte 5 body. Když řešitel skončí s vypisováním sloupců tabulky po nalezení prvního řešení, udělte mu nejvýše 4 body. Nalezne-li řešitel náhodně jedno řešení a neuvede-li postup ani ověření, udělte mu 1 bod; 2 body mu udělte v případě, že svůj výsledek ověří.