I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Korespondenční matematická soutěž probíhá ve třech kolech, jejichž náročnost se stupňuje. Do druhého kola postupují jen ti řešitelé, kteří byli úspěšní v prvním kole, do třetího kola postupují jen úspěšní řešitelé druhého kola. Vítězem je každý, kdo je úspěšným řešitelem posledního, tedy třetího kola. V posledním ročníku této soutěže bylo přesně 14 % řešitelů úspěšných v prvním kole, přesně 25 % řešitelů druhého kola postoupilo do třetího kola a přesně 8 % řešitelů třetího kola zvítězilo.

Jaký je nejmenší počet soutěžících, kteří se mohli zúčastnit prvního kola? Kolik by v takovém případě bylo vítězů? (*M. Petrová*)

Nápad. Všechny mezivýsledky musejí být přirozená čísla.

Možné řešení. Počet všech řešitelů prvního kola si označíme x. Počet úspěšných řešitelů prvního kola (a tedy počet všech řešitelů druhého kola) je 14 % z x, tedy $0{,}14x$. Počet úspěšných řešitelů druhého kola (a tedy počet všech řešitelů třetího kola) je 25 % z $0{,}14x$, tj. $0{,}25 \cdot 0{,}14x = 0{,}035x$. Počet úspěšných řešitelů třetího kola (a tedy i počet vítězů) je 8 % z $0{,}035x$, tj. $0{,}08 \cdot 0{,}035x = 0{,}0028x$.

Protože všechny výpočty jsou přesné (bez zaokrouhlování), musejí být čísla x, $0{,}14x$, $0{,}035x$ a $0{,}0028x$ přirozená. Začneme u posledního z nich:

$$0{,}0028x = \frac{28}{10\,000}\,x = \frac{7}{2\,500}\,x,$$

číslo x tedy musí být násobek čísla 2 500. Protože hledáme nejmenší řešení, budeme postupně zkoušet násobky 2 500, a to tak dlouho, než všechna zmiňovaná čísla budou přirozená:

x	$0{,}14x$	$0{,}035x$	$0{,}0028x$	závěr
2 500	350	87,5	7	nevyhovuje
5 000	700	175	14	vyhovuje

Nejmenší počet soutěžících, kteří se mohli zúčastnit prvního kola, je 5 000. Vítězů by v takovém případě bylo 14.

Jiné řešení. Počet všech řešitelů prvního kola označíme x. Počet úspěšných řešitelů prvního kola (a tedy počet všech řešitelů druhého kola) je 14 % z x, tedy

$$\frac{14}{100}\,x = \frac{7}{50}\,x.$$

Počet úspěšných řešitelů druhého kola (a tedy počet všech řešitelů třetího kola) je 25 % z předchozího počtu, tj.

$$\frac{25}{100} \cdot \frac{7}{50}\,x = \frac{7}{200}\,x.$$

Počet úspěšných řešitelů třetího kola (a tedy i počet vítězů) je 8 % z předchozího počtu, tj.

$$\frac{8}{100} \cdot \frac{7}{200}\, x = \frac{7}{2500}\, x.$$

Všechny výše uvedené výrazy musejí být přirozená čísla, číslo x tedy musí být společným násobkem čísel 50, 200 a 2 500. Protože nás zajímá nejmenší možný počet soutěžících v prvním kole soutěže, hledáme nejmenší společný násobek uvedených čísel, což je 5 000.

Nejmenší počet soutěžících v prvním kole je tedy 5 000 a počet vítězů by v tomto případě byl

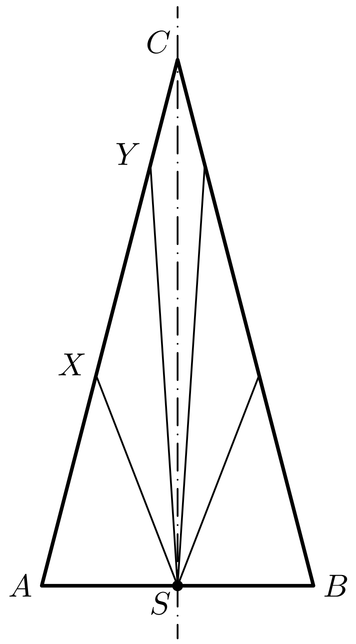
$$\frac{7}{2500} \cdot 5000 = 14.$$

Z8–I–2

Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB dlouhou 10 cm a rameny dlouhými 20 cm. Bod S je střed základny AB. Rozdělte trojúhelník ABC čtyřmi přímkami procházejícími bodem S na pět částí se stejným obsahem. Zjistěte, jak dlouhé úsečky vytnou tyto přímky na ramenech trojúhelníku ABC. (*E. Trojáková*)

Nápad. Uvedená konstrukce je osově souměrná.

Možné řešení. Trojúhelník ABC je souměrný podle osy CS, proto i dělicí přímky musejí být osově souměrné podle stejné osy. Odpovídající části pak budou tvořit dvě dvojice osově souměrných trojúhelníků a jeden (osově souměrný) čtyřúhelník s vrcholem C. Označme průsečíky dvou dělicích přímek s jedním ramenem X a Y, viz obrázek.



Podle zadání mají být obsahy trojúhelníků ASX a XSY a dvojnásobek obsahu trojúhelníku YSC stejné. Tyto tři trojúhelníky však mají stejnou výšku ze společného vrcholu S, takže obsahy budou v uvedeném poměru právě tehdy, když pro protilehlé strany

platí
$$|AX| = |XY| = 2|YC|.$$
Současně víme, že
$$|AC| = |AX| + |XY| + |YC| = 20\,\mathrm{cm}.$$
Z uvedeného plyne, že $5|YC| = 20\,\mathrm{cm}$, tj. $|YC| = 4\,\mathrm{cm}$ a $|AX| = |XY| = 8\,\mathrm{cm}$. Dělicí přímky vytínají na ramenech trojúhelníku úsečky dlouhé 4 a 8 cm.

Z8–I–3

Hledáme pětimístné číslo s následujícími vlastnostmi: je to palindrom (tj. čte se pozpátku stejně jako zepředu), je dělitelné dvanácti a ve svém zápisu obsahuje číslici 2 bezprostředně za číslicí 4. Určete všechna možná čísla, která vyhovují zadaným podmínkám. (*M. Mach*)

Nápad. Určete, jak mohou být umístěny číslice 2 a 4; pro každý případ zvlášť pak diskutujte zbylé podmínky.

Možné řešení. Pětimístné palindromy, v nichž se číslice 2 objevuje bezprostředně za číslicí 4, jsou právě následující:
$$42{*}24, \quad {*}424{*}, \quad {*}242{*}, \quad 24{*}42.$$
Pro tyto případy stačí nyní diskutovat dělitelnost dvanácti. Číslo je dělitelné dvanácti právě tehdy, když je dělitelné třemi a zároveň čtyřmi, tj. právě tehdy, když jeho ciferný součet je dělitelný třemi a zároveň poslední dvojčíslí je dělitelné čtyřmi.

Číslo 24 je dělitelné čtyřmi, proto jsou palindromy typu $42{*}24$ vždy dělitelné čtyřmi, a proto se zajímáme pouze o dělitelnost třemi. Známé číslice mají ciferný součet 12, který dělitelný třemi je, proto hvězdička uprostřed musí zastupovat násobek tří — 0, 3, 6 nebo 9.

Palindromy typu ${*}424{*}$ jsou dělitelné čtyřmi, právě když poslední číslice je 0, 4 nebo 8. Protože jde o palindrom, stejná číslice bude i na začátku, proto varianta s nulou nevyhovuje. Po doplnění čtyřek je ciferný součet 18, po doplnění osmiček 26. Tudíž dělitelný třemi je pouze palindrom 44244.

Palindromy typu ${*}242{*}$ jsou dělitelné čtyřmi, právě když poslední číslice je 0, 4 nebo 8. Stejně jako v předchozím případě vylučujeme 0 a určíme ciferné součty: pro čtyřky je to 16, pro osmičky 24. Dělitelný třemi je pouze palindrom 82428.

Protože číslo 42 není dělitelné čtyřmi, palindromy typu $24{*}42$ nemohou být dělitelné čtyřmi, tedy ani dvanácti. Zadaným podmínkám vyhovují právě následují čísla:
$$42024,\ 42324,\ 42624,\ 42924,\ 44244,\ 82428.$$

Z8–I–4

Na střed hrnčířského kruhu jsme položili krychli, která měla na každé své stěně napsáno jedno přirozené číslo. Těsně předtím, než jsme kruh roztočili, jsme ze svého stanoviště viděli tři stěny krychle a tedy pouze tři čísla. Jejich součet byl 42. Po otočení hrnčířského kruhu o 90° jsme ze stejného místa pozorovali tři stěny s čísly dávajícími součet 34 a po otočení o dalších 90° jsme stále z téhož místa viděli tři čísla o součtu 53.

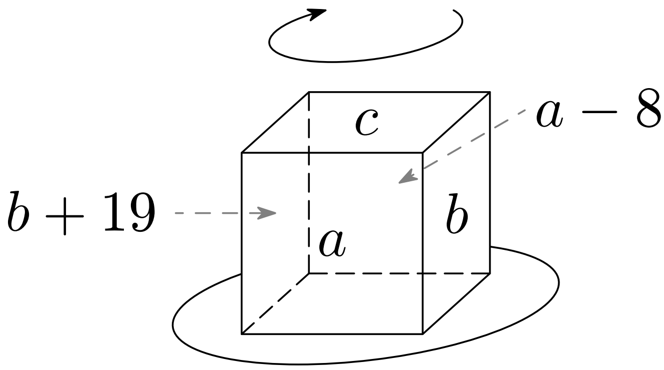
1. Určete součet tří čísel, která z našeho místa uvidíme, až se kruh otočí ještě o dalších 90°.
2. Krychle po celou dobu ležela na stěně s číslem 6. Určete maximální možný součet všech šesti čísel na krychli.

(*L. Šimůnek*)

Nápad. Zaměřte se na vztah mezi čísly vzájemně rovnoběžných bočních stěn.

Možné řešení. Čísla, která vidíme před roztočením kruhu, označme a, b, c, přičemž c je číslo na horní stěně. Po otočení o 90° ztratíme z našeho pohledu stěnu s číslem a a objeví se stěna s ní rovnoběžná. Podle zadání se součet viditelných čísel změní ze 42 na 34, tedy zmenší se o 8. Nově se objevivší číslo je proto o 8 menší než a, tj. $a - 8$.

Obdobně uvažujeme o další otočce o 90°. Při ní ztratíme z pohledu stěnu s číslem b a součet viditelných čísel se změní ze 34 na 53, tedy zvětší se o 19. Na zbývající boční stěně se proto objeví číslo $b + 19$.



Ještě po dalším otočení o 90° tak vidíme stěny s čísly $b + 19$, a, c. Ze zadání víme, že $a + b + c = 42$, tudíž $a + b + 19 + c = 42 + 19 = 61$. Součet 61 je řešením prvního úkolu.

Nyní řešíme druhý úkol. Před roztočením kruhu vidíme tři stěny se součtem 42, po otočení o 180° vidíme jiné dvě boční stěny a stále stejnou horní stěnu s číslem c, tentokrát jde o součet 53. Tedy součet čísel na těchto pěti stěnách je roven $42 + 53 - c$. Na krychli je podle zadání zespodu napsané číslo 6, součet všech jejích čísel je tudíž roven $6+42+53-c$, tj. $101 - c$. Máme-li určit největší možnou hodnotu tohoto výrazu, dosadíme za c nejmenší přípustnou hodnotu 1. A pak vidíme, že součet čísel na krychli mohl být nejvýše 100.

Jiné řešení druhého úkolu. Z výše uvedeného řešení použijeme obrázek s jeho popisem. Součet všech čísel na krychli je

$$a + b + (a - 8) + (b + 19) + c + 6 = 2a + 2b + c + 17.$$

Přitom platí, že všechny neznámé jsou přirozená čísla a $a \geqq 9$, aby i hodnota $a-8$ byla přirozené číslo. Poslední podmínkou je $a+b+c=42$. Abychom při daném součtu $a+b+c$ získali co největší hodnotu výrazu $2a+2b+c+17$, musíme za c zvolit co nejmenší přípustnou hodnotu, tj. 1, protože ostatní neznámé jsou ve výrazu zastoupeny ve svých násobcích. Součet $a+b$ pak nabývá hodnoty 41 a součet všech šesti čísel na krychli tak může být nejvýše

$$2a+2b+c+17 = 2 \cdot 41 + 1 + 17 = 100.$$

Z8–I–5

Pankrác, Servác a Bonifác jsou bratři, kteří mají P, S a B let. Víme, že P, S a B jsou přirozená čísla menší než 16, pro něž platí:

$$\begin{aligned} P &= \frac{5}{2}(B-S), \\ S &= 2(B-P), \\ B &= 8(S-P). \end{aligned}$$

Určete stáří všech tří bratrů. (*L. Hozová*)

Nápad. Bonifácův věk lze určit velmi snadno.

Možné řešení. Ze třetí rovnice plyne, že B je přirozené číslo menší než 16 právě tehdy, když $S-P=1$, neboli $S=P+1$; potom nutně $B=8$. Dosadíme tyto poznatky do druhé rovnice a určíme P:

$$\begin{aligned} P+1 &= 2(8-P), \\ P+1 &= 16-2P, \\ 3P &= 15, \\ P &= 5. \end{aligned}$$

Odtud $S=5+1=6$ a snadno ověříme, že trojice $B=8$, $P=5$ a $S=6$ vyhovuje také rovnici první: $5=\frac{5}{2}(8-6)$. Pankrác má tedy 5, Servác 6 a Bonifác 8 let.

Poznámka. S rovnicemi ze zadání lze manipulovat různým způsobem, nicméně bez omezení $P, S, B < 16$ by úloha neměla řešení určeno jednoznačně — najdete nějaké další?

Jiné řešení. Ze zadání plyne, že P, S a B jsou kladná čísla, právě když $B > S > P > 0$. Stejně jako u předchozího řešení určíme, že ze třetí rovnice plyne $B=8$ a $P=S-1$. Navíc z druhé rovnice je patrné, že S je sudé číslo. Celkem tedy vidíme, že řešením úlohy může být jedině některá z následujících trojic čísel:

B	S	P
8	6	5
8	4	3
8	2	1

Dosazením do první a druhé rovnice zjistíme, že jediným řešením je trojice $B = 8$, $S = 6$ a $P = 5$.

Z8–I–6

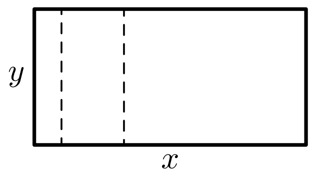
Janka si narýsovala obdélník s obvodem 22 cm a délkami stran vyjádřenými v centimetrech celými čísly. Potom obdélník rozdělila beze zbytku na tři obdélníky, z nichž jeden měl rozměry $2\,\mathrm{cm} \times 6\,\mathrm{cm}$. Součet obvodů všech tří obdélníků byl o 18 cm větší než obvod původního obdélníku. Jaké rozměry mohl mít původní obdélník? Najděte všechna řešení.

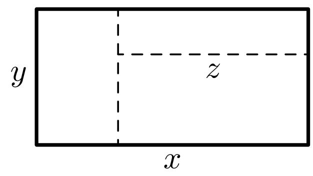
(*M. Dillingerová*)

Nápad. Určete, jak mohla Janka obdélník rozdělit; pro jednotlivé možnosti pak vyjádřete zadaný rozdíl obvodů pomocí délek dělicích čar.

Možné řešení. Všechny veličiny v textu jsou vyjádřeny v centimetrech, jednotky dále uvádět nebudeme. Délky stran Jančina obdélníku označíme x a y, podle zadání jsou to přirozená čísla.

Nejprve zjistíme, jak mohla Janka svůj obdélník rozdělit. Typově máme pouze následující dvě možnosti (pozor, obrázky jsou schematické, tj. rozhodně nepředpokládáme, že $x > y$):

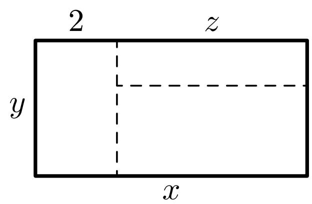




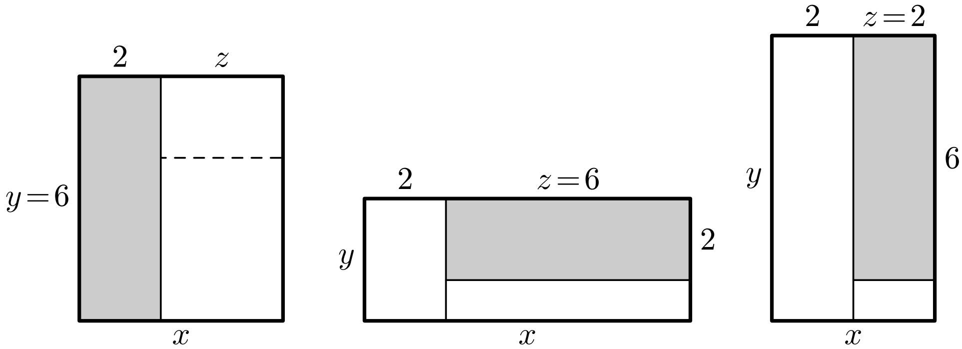
Obvod původního obdélníku je $2(x + y) = 22$, tedy $x + y = 11$. Součet obvodů tří nových obdélníků je vždy větší než obvod původní, a to právě o dvojnásobek součtu délek dělicích úseček, které jsou v obrázku vyznačeny čárkovaně. Tento rozdíl má být roven 18.

I. Obě dělicí úsečky mají stejnou délku, totiž y. Musí tedy platit $4y = 18$, odtud $y = 4{,}5$. To ovšem není možné, protože 4,5 není celé číslo. Tímto způsobem tudíž Janka obdélník nerozdělila.

II. Dvě dělicí úsečky, které leží v jedné přímce, mají součet délek y. Délku třetí dělicí úsečky označíme z. Potom musí platit $2y + 2z = 18$, tedy $y + z = 9$. To spolu s podmínkou $x + y = 11$ znamená, že rozměr x je o 2 větší než rozměr z. Tento poznatek si zaznamenáme do obrázku:



Nyní prověříme, který z nových obdélníků může mít rozměry 2×6 a jak může být umístěn — celkem máme tyto tři možnosti:



Pomocí dříve odvozených vztahů mezi x, y a z vyjádříme rozměry obdélníků v jednotlivých případech:

a) Je-li $y = 6$, pak $x = 5$ a $z = 3$.

b) Je-li $z = 6$, pak $x = 8$ a $y = 3$.

c) Je-li $z = 2$, pak $x = 4$ a $y = 7$.

Jančin obdélník mohl mít rozměry 5×6, 8×3 nebo 4×7.

Poznámka. Při stejném značení jako výše z požadavku, aby Jančin obdélník obsahoval obdélník 2×6, plyne, že $x, y \geqq 2$. Protože x a y jsou přirozená čísla a $x + y = 11$, rozměry Jančina obdélníku by mohly být 2×9, 3×8, 4×7 nebo 5×6.

Nyní lze postupně probírat tyto čtyři případy, tzn. umístit obdélník 2×6, diskutovat možná dodatečná dělení a kontrolovat požadavek o obvodech. Takto rychle zjistíme, že jediné možnosti, jak mohla Janka svůj obdélník rozdělit, jsou právě výše uvedené možnosti a), b), c).