I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Pokladní v galerii prodává návštěvníkům vstupenky s číslem podle toho, kolikátí ten den přišli. První návštěvník dostane vstupenku s číslem 1, druhý s číslem 2, atd. Během dne však došel žlutý papír, na který se vstupenky tiskly, proto musela pokladní pokračovat tisknutím na papír červený. Za celý den prodala stejně žlutých vstupenek jako červených. Zjistila, že součet čísel na žlutých vstupenkách byl o 1 681 menší než součet čísel na červených vstupenkách. Kolik toho dne prodala vstupenek? (*M. Mach*)

Nápad. Všimněte si, o kolik se liší čísla na prodaných žlutých a červených vstupenkách.

Možné řešení. Označme počet žlutých vstupenek n. Na první žluté vstupence bylo číslo 1, na druhé 2, atd., na poslední žluté vstupence bylo číslo n. Na první červené vstupence bylo číslo $n+1$, na druhé červené $n+2$, atd., na poslední červené bylo číslo $2n$.

Všimněme si, že první červená vstupenka má číslo o n větší než první žlutá. Stejně tak druhá červená vstupenka má číslo o n větší než druhá žlutá; totéž platí pro všechny takovéto dvojice vstupenek, kterých je celkem n. Součet čísel na červených vstupenkách je proto o n^2 větší než součet čísel na vstupenkách žlutých. Ze zadání víme, že $n^2 = 1\,681$, tedy $n = 41$.

Pokladní toho dne prodala 41 žlutých a 41 červených vstupenek, celkem tedy 82 vstupenek.

Z9–I–2

Filoména má mobil s následujícím rozmístěním tlačítek:

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

Devítimístné telefonní číslo její nejlepší kamarádky Kunhuty má tyto vlastnosti:

- všechny číslice Kunhutina telefonního čísla jsou různé,
- první čtyři číslice jsou seřazeny podle velikosti od nejmenší po největší a středy jejich tlačítek tvoří čtverec,
- středy tlačítek posledních čtyř číslic také tvoří čtverec,
- telefonní číslo je dělitelné třemi a pěti.

Kolik různých devítimístných čísel by mohlo být Kunhutiným telefonním číslem? (*K. Pazourek*)

Nápad. Které číslice mohou tvořit poslední a které první čtveřici?

Možné řešení. Nejprve najděme všechny čtveřice tlačítek, jejichž středy tvoří čtverec — jsou to tlačítka s následujícími číslicemi:

$$\begin{array}{ll} 1,2,4,5 & 1,3,7,9 \\ 2,3,5,6 & 2,4,6,8 \\ 4,5,7,8 & 5,7,9,0 \\ 5,6,8,9 & \end{array}$$

Čtveřice v levém sloupci však využít nemůžeme, neboť vedle čtverce, který příslušná tlačítka tvoří, bychom žádný další čtverec ze zbylých tlačítek nesestavili. Protože telefonní číslo je dělitelné pěti, musí končit 5 nebo 0; proto poslední čtyři číslice telefonního čísla jsou 5, 7, 9, 0 (jejich pořadí diskutujeme později). Protože jsme již použili číslice 7 a 9, první čtyři číslice telefonního čísla musejí být 2, 4, 6, 8 (v tomto pořadí, jsou srovnány podle velikosti).

Dosud nepoužité číslice, které mohou být uprostřed telefonního čísla, jsou 1 a 3. Telefonní číslo má být dělitelné třemi, určeme tedy možné ciferné součty. Součet všech číslic na klávesnici je 45. Pokud by v telefonním čísle byla 1, tj. telefonní číslo by obsahovalo všechny číslice kromě 3, byl by ciferný součet $45 - 3 = 42$. Pokud by v telefonním čísle byla 3, byl by ciferný součet $45 - 1 = 44$. Číslo 42 je dělitelné 3, číslo 44 nikoli, prostřední číslice je tedy 1.

Protože jsme neopomněli žádný z požadavků v zadání, hledané telefonní číslo je

$$246\,81{*}\,{*}{*}{*},$$

kde poslední čtyři číslice jsou 5, 7, 9, 0 v neznámém pořadí, pouze víme, že na posledním místě musí být 5 nebo 0. Abychom zjistili počet všech možných Kunhutiných telefonních čísel, nebudeme je všechny vypisovat, pouze si touto představou pomůžeme: Poslední číslici lze zvolit dvojím způsobem, předposlední číslici poté vybíráme mezi třemi zbylými číslicemi, předcházející už jen mezi dvěma zbylými a na poslední nevyplněné místo nám vždy zbude jediná číslice. Dostáváme dohromady

$$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

možných pořadí na posledních čtyřech místech, a tedy i 12 možných Kunhutiných telefonních čísel.

Z9–I–3

Amálka pozorovala veverky na zahrádce hájenky, kde rostly tyto tři stromy: smrk, buk a jedle. Veverky seděly v klidu na stromech, takže je mohla spočítat — bylo jich 34. Když přeskákalo 7 veverek ze smrku na buk, bylo jich na buku stejně jako na obou dvou jehličnanech dohromady. Poté ještě přeskákalo 5 veverek z jedle na buk, v tu chvíli bylo na jedli stejně veverek jako na smrku. Na buku jich poté bylo dvakrát tolik, co na jedli ze začátku. Kolik veverek původně sedělo na každém ze stromů? (*M. Mach*)

Nápad. Sestavte soustavu rovnic. Před vlastním řešením soustavy si všimněte, že některé rovnice jsou přebytečné, tzn. lze je odvodit z ostatních.

Možné řešení. Původní počet veverek na smrku označíme s, na buku b a na jedli j. Ze zadání můžeme sestavit soustavu čtyř rovnic o těchto třech neznámých:

$$
\begin{aligned}
s + b + j &= 34,\\
b + 7 &= j + s - 7,\\
j - 5 &= s - 7,\\
b + 7 + 5 &= 2j.
\end{aligned}
$$

Všimněme si, že sečtením třetí a čtvrté rovnice dostaneme rovnici druhou. Pro vyřešení soustavy rovnic proto stačí vybrat libovolné dvě z těchto tří rovnic a doplnit je rovnicí první. Takto dostaneme soustavu tří rovnic o třech neznámých. Ukážeme si řešení s první, druhou a čtvrtou rovnicí:

$$
\begin{aligned}
s + b + j &= 34,\\
b + 7 &= j + s - 7,\\
b + 7 + 5 &= 2j.
\end{aligned}
$$

Sečteme první dvě rovnice a upravíme:

$$
\begin{aligned}
s + 2b + j + 7 &= 27 + j + s,\\
2b &= 20,\\
b &= 10.
\end{aligned}
$$

Dosadíme tento výsledek do poslední rovnice a vyjádříme j:

$$
\begin{aligned}
10 + 7 + 5 &= 2j,\\
22 &= 2j,\\
j &= 11.
\end{aligned}
$$

Vše dosadíme do první rovnice a vyjádříme s:

$$
\begin{aligned}
s + 10 + 11 &= 34,\\
s &= 13.
\end{aligned}
$$

Na smrku původně sedělo 13, na buku 10 a na jedli 11 veverek.

Jiný nápad. Určete, kolik veverek sedělo na buku ve chvíli, kdy jich tam bylo stejně jako na obou jehličnanech.

Jiné řešení. Po prvním přeskákání byla na buku přesně polovina veverek, čili 17. Protože jich na buk 7 přiskočilo, sedělo původně na buku $17 - 7 = 10$ veverek.

Po druhém přeskákání bylo na buku $17 + 5 = 22$ veverek. Víme, že na konci bylo na buku dvakrát více veverek než na jedli na začátku, tedy na začátku sedělo na jedli $22 : 2 = 11$ veverek.

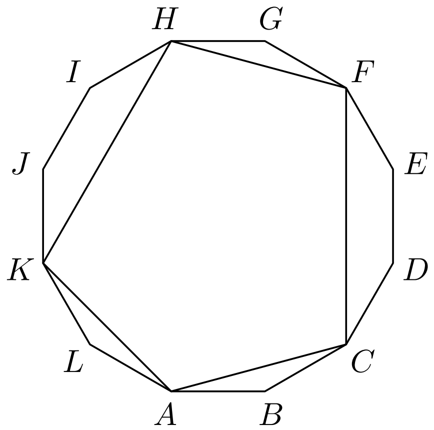
Celkem bylo veverek 34, proto bylo původně na smrku $34-10-11=13$ veverek. Právě jsme došli k původním počtům veverek na všech stromech, ale vůbec jsme nepracovali se zadanou informací, že po všech přeskocích bylo na jedli stejně veverek jako na smrku. Musíme ověřit, zda tato informace není v rozporu s předchozími výpočty: $11-5=13-7$, tedy naše výsledky odpovídají celému zadání.

Na smrku původně sedělo 13, na buku 10 a na jedli 11 veverek.

Poznámka. Uvedená řešení představují různé pohledy na tentýž problém. Srovnejte zejména, jak jsme odhalili přebytečnost jedné ze zadaných informací v prvním a jak ve druhém případě. Uměli byste tuto přebytečnost zjistit i jinak?

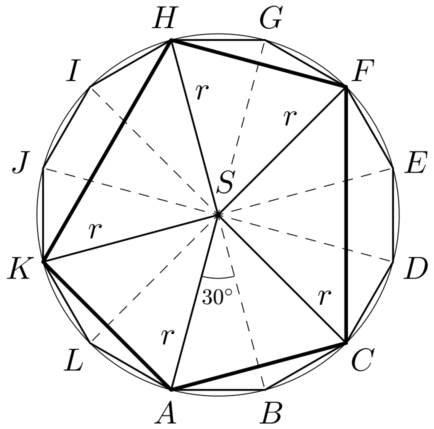
Z9–I–4

V pravidelném dvanáctiúhelníku $ABCDEFGHIJKL$ vepsaném do kružnice o poloměru 6 cm určete obvod pětiúhelníku $ACFHK$. (*K. Pazourek*)



Nápad. Rozdělte pětiúhelník na trojúhelníky se společným vrcholem ve středu kružnice opsané a zjistěte jejich vlastnosti.

Možné řešení. Nejprve spočtěme velikost středového úhlu pravidelného dvanáctiúhelníku $ABCDEFGHIJKL$, tj. úhlu s vrcholem ve středu S opsané kružnice a rameny procházejícími sousedními vrcholy. Součet všech dvanácti středových úhlů je 360°, tudíž velikost jednoho středového úhlu je $360^\circ : 12 = 30^\circ$.



Velikosti středových úhlů pětiúhelníku $ACFHK$ jsou:

$$|\sphericalangle ASC| = |\sphericalangle FSH| = |\sphericalangle KSA| = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ,$$
$$|\sphericalangle CSF| = |\sphericalangle HSK| = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ.$$

Trojúhelníky ASC, FSH, KSA jsou tudíž rovnostranné a trojúhelníky CSF a HSK jsou rovnoramenné pravoúhlé. Proto

$$|AC| = |FH| = |KA| = r = 6\,\text{cm},$$
$$|CF| = |HK| = r\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\,\text{cm}.$$

Obvod pětiúhelníku $ACFHK$ je tak roven $3 \cdot 6 + 2 \cdot 6\sqrt{2} = 18 + 12\sqrt{2} \doteq 34{,}97\,(\text{cm})$.

Z9–I–5

Před vánočním koncertem nabízeli žáci k prodeji 60 výrobků z hodin výtvarné výchovy. Cenu si mohl každý zákazník určit sám a celý výtěžek šel na dobročinné účely. Na začátku koncertu žáci spočítali, kolik korun v průměru utržili za jeden prodaný výrobek, a vyšlo jim přesně celé číslo. Protože stále neprodali všech 60 výrobků, nabízeli je i po koncertě. To si lidé koupili ještě dalších sedm, za které dali celkem 2 505 Kč. Tím se průměrná tržba za jeden prodaný výrobek zvýšila na rovných 130 Kč. Kolik výrobků pak zůstalo neprodaných? (*L. Šimůnek*)

Nápad. Určete vztah mezi počtem výrobků prodaných před koncertem a za ně získanou částkou. Uvědomte si, že všechny neznámé mají být celá čísla.

Možné řešení. Počet výrobků, které žáci prodali před koncertem, označme v a obnos v korunách, který za ně získali, označme k. Podle zadání je podíl $\frac{k}{v}$ celé číslo a platí

$$\frac{k + 2\,505}{v + 7} = 130.$$

Z této rovnice vyjádříme neznámou k pomocí neznámé v:

$$k + 2\,505 = 130v + 130 \cdot 7,$$
$$k = 130v - 1\,595.$$

Získaný výraz dosadíme do zlomku $\frac{k}{v}$ a následně jej částečně vydělíme:

$$\frac{130v - 1\,595}{v} = 130 - \frac{1\,595}{v}.$$

Neznámá v je přirozené číslo, a protože právě uvedený výraz má být roven celému číslu, musí být v dělitelem čísla 1 595. Přitom číslo $1\,595 = 5 \cdot 11 \cdot 29$ má právě následující dělitele:

$$1,\ 5,\ 11,\ 29,\ 55,\ 145,\ 319,\ 1\,595.$$

Podle zadání zůstalo po prodeji v výrobků z celkových 60 minimálně 7, tedy $v \leqq 53$. Pokud do rovnice $k = 130v - 1595$ dosadíme za v 1, 5 či 11, dostaneme k záporné, což odporuje zadání. Pro $v = 29$ je tržba k kladná, takže jediná přípustná hodnota pro v je 29. Celkově se prodalo $29 + 7 = 36$ výrobků a neprodaných zůstalo $60 - 36 = 24$.

Jiný nápad. Pokud se hovoří o průměrné ceně, zkuste si situaci zjednodušit představou, že všichni zmínění zaplatili shodně právě tuto cenu.

Jiné řešení. Pro potřeby řešení můžeme situaci zjednodušit a představit si, že každý zákazník nakupující před koncertem zaplatil stejný celočíselný obnos. Ten se rovnal průměrné ceně vypočítané žáky před koncertem.

Po koncertě přišla sedmice zákazníků, která za každého dřívějšího zákazníka dorovnala zaplacenou částku do 130 Kč a sama za sebe zaplatila $7 \cdot 130$ Kč. Celkové dorovnávaní ceny tedy odpovídalo částce $2\,505 - 7 \cdot 130 = 1\,595$ (Kč).

Tuto sumu musíme rozložit na součin, kde jedním činitelem bude počet zákazníků před koncertem a druhým činitelem počet korun, které za každého takového zákazníka doplatila sedmice později příchozích. O prvním jmenovaném činiteli víme ze zadání, že musí být menší nebo roven 53, a o druhém víme, že musí být menší než 130. Číslo 1 595 lze rozložit na součin dvou přirozených čísel právě těmito způsoby:

$$1 \cdot 1\,595,\ 5 \cdot 319,\ 11 \cdot 145,\ 29 \cdot 55.$$

Uvedeným podmínkám vyhovuje jedině rozklad $29 \cdot 55$. Celkově se tedy prodalo $29 + 7 = 36$ výrobků a neprodaných zůstalo $60 - 36 = 24$.

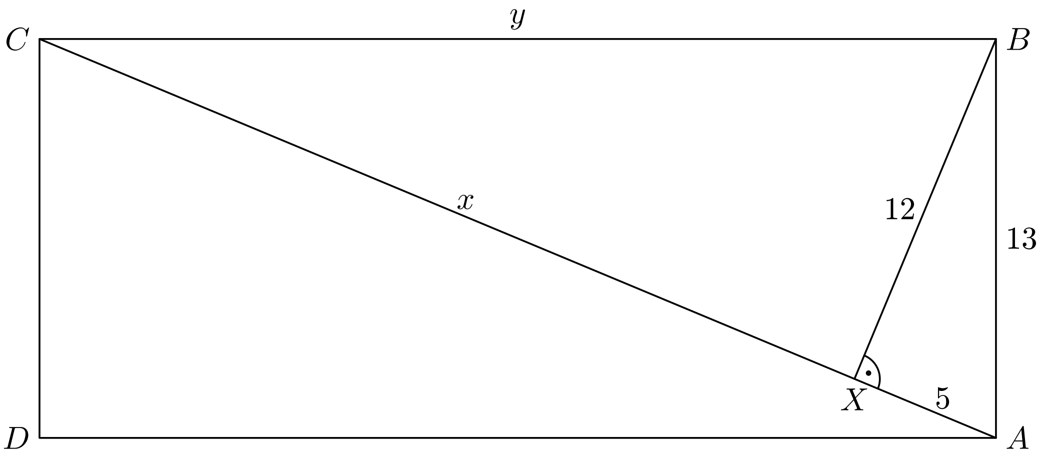
Z9–I–6

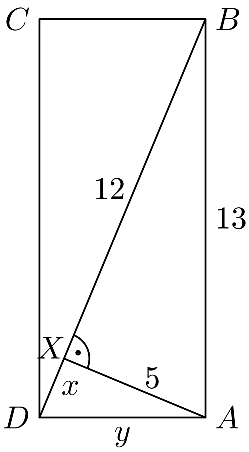
V obdélníkové zahradě roste broskvoň. Tento strom je od dvou sousedních rohů zahrady vzdálen 5 metrů a 12 metrů a vzdálenost mezi zmíněnými dvěma rohy je 13 metrů. Dále víme, že broskvoň stojí na úhlopříčce zahrady. Jak velká může být plocha zahrady? (*M. Mach*)

Nápad. Užijte vhodně Pythagorovu větu, příp. větu opačnou.

Možné řešení. Obdélník představující půdorys zahrady označíme $ABCD$, broskvoň na jedné z jeho úhlopříček je zastoupena bodem X. Řekněme, že dva sousední rohy ze zadání jsou A, B a platí $|AX| = 5$, $|BX| = 12$, $|AB| = 13$. (Všechny délky jsou v metrech a jednotky dále nepíšeme.) Tato čísla tvoří pythagorejskou trojici, čili platí $5^2 + 12^2 = 13^2$. Proto je trojúhelník AXB pravoúhlý s přeponou AB, tj. s pravým úhlem u vrcholu X.

Bod X může ležet buď na úhlopříčce AC nebo na úhlopříčce BD, budeme diskutovat obě možnosti. V každém případě vzdálenost bodu X od druhého vrcholu na úhlopříčce označíme x a neznámou délku strany obdélníku označíme y. Ze zadaných informací určíme y, plocha zahrady (v metrech čtverečních) pak bude rovna $13y$.





I. Bod X leží na úhlopříčce AC. Podle Pythagorovy věty pro pravoúhlé trojúhelníky ABC a BXC sestavíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned}(5+x)^2 &= 13^2 + y^2,\\ y^2 &= 12^2 + x^2.\end{aligned}$$

Do první rovnice dosadíme za y^2 a vypočteme x:

$$\begin{aligned}(5+x)^2 &= 13^2 + 12^2 + x^2,\\ 25 + 10x + x^2 &= 169 + 144 + x^2,\\ 10x &= 288,\\ x &= \frac{144}{5}.\end{aligned}$$

Dosadíme za x do druhé rovnice a výraz upravíme:

$$y^2 = 12^2 + \left(\frac{144}{5}\right)^2 = 144 + \frac{20\,736}{25} = \frac{24\,336}{25}.$$

Odtud plyne, že $y = \frac{156}{5}$ a obsah obdélníku $ABCD$, tj. plocha zahrady (v metrech čtverečních), v tomto případě je:

$$13 \cdot \frac{156}{5} = \frac{2\,028}{5} = 405{,}6.$$

II. Bod X leží na úhlopříčce BD. Podle Pythagorovy věty pro pravoúhlé trojúhelníky DAB a DXA sestavíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned}(12 + x)^2 &= 13^2 + y^2,\\ y^2 &= 5^2 + x^2.\end{aligned}$$

Do první rovnice dosadíme za y^2 a vypočteme x:

$$\begin{aligned}(12 + x)^2 &= 13^2 + 5^2 + x^2,\\ 144 + 24x + x^2 &= 169 + 25 + x^2,\\ 24x &= 50,\\ x &= \frac{25}{12}.\end{aligned}$$

Dosadíme za x do druhé rovnice a výraz upravíme:

$$y^2 = 5^2 + \left(\frac{25}{12}\right)^2 = 25 + \frac{625}{144} = \frac{4\,225}{144}.$$

Odtud plyne, že $y = \frac{65}{12}$ a obsah obdélníku $ABCD$, tj. plocha zahrady (v metrech čtverečních), v tomto případě je:

$$13 \cdot \frac{65}{12} = \frac{845}{12} \doteq 70{,}42.$$

Poznámka. Všimněte si výpočtu délky x. Dvojím užitím Pythagorovy věty jsme v prvním případě odvodili, že $5x = 144$, což odpovídá $|AX| \cdot |XC| = |XB|^2$. Uvedený výpočet v podstatě dokazuje, že tato rovnost platí v libovolném pravoúhlém trojúhelníku ABC, kde X je pata výšky na přeponu AC. Toto tvrzení je známé jako Eukleidova věta o výšce.

Jiný nápad. Všimněte si podobných trojúhelníků.

Jiné řešení. Při stejném značení jako výše můžeme jednotlivé možnosti diskutovat následovně.

I. Bod X leží na úhlopříčce AC. Trojúhelníky ABC a AXB jsou oba pravoúhlé a mají stejný vnitřní úhel u společného vrcholu A. Tyto trojúhelníky jsou tedy podobné, a proto platí:

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|XB|}{|AX|},$$

neboli

$$\frac{y}{13} = \frac{12}{5}.$$

Odtud plyne, že $y = \frac{156}{5}$, a závěr je stejný jako u předchozího řešení.

II. Bod X leží na úhlopříčce BD. Trojúhelníky DAB a AXB jsou oba pravoúhlé a mají stejný vnitřní úhel u společného vrcholu B. Tyto trojúhelníky jsou tedy podobné, a proto platí:

$$\frac{|DA|}{|AB|} = \frac{|AX|}{|XB|},$$

neboli

$$\frac{y}{13} = \frac{5}{12}.$$

Odtud plyne, že $y = \frac{65}{12}$, a závěr je stejný jako u předchozího řešení.