# II. kolo kategorie Z7

**Z7–II–1**

Petr a Karel spolu sehráli řadu partií šachu. Domluvili se, že za výhru si hráč připočítá 3 body, za prohru 2 body odečte, za remízu žádné body nejsou. Kamarádi chtěli vědět, kolik už Petr s Karlem sehráli partií a kdo nyní vede, ale dozvěděli se jenom, že Petr šestkrát vyhrál, dvakrát remizoval, několikrát prohrál a Karel že má právě 9 bodů. Kolik partií chlapci sehráli a kdo nyní vede? (*M. Volfová*)

**Možné řešení.** Karel musel vyhrát tolikrát, aby mu po odečtení 12 bodů za 6 proher zbylo ještě 9 bodů. Na výhrách tedy musel získat $9 + 12 = 21$ bodů, čemuž odpovídá 7 výher. Petr tudíž sedmkrát prohrál. Ze zadání ještě víme, že také dvakrát remizoval a šestkrát vyhrál, má tedy celkem $6 \cdot 3 + 2 \cdot 0 - 7 \cdot 2 = 4$ body.

Chlapci sehráli $6 + 2 + 7 = 15$ partií, vede Karel.

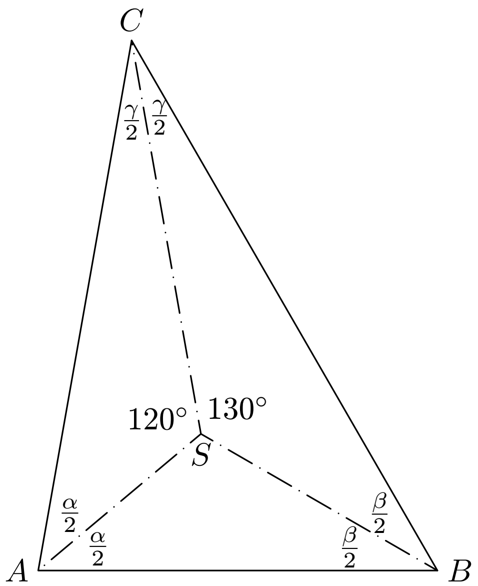
**Hodnocení.** 4 body za správnou úvahu o počtu výher Karla; 1 bod za zdůvodněný poznatek, že vede Karel; 1 bod za stanovení počtu odehraných partií.

**Poznámka.** Soutěžící nemusí určovat Petrův bodový zisk. Poznatek, že vede Karel, může totiž zdůvodnit i pouhým porovnáním sedmi Karlových výher se šesti Petrovými výhrami.

**Z7–II–2**

V trojúhelníku $ABC$ se osy jeho vnitřních úhlů protínají v bodě $S$. Úhel $BSC$ má velikost 130°, úhel $ASC$ má 120°. Jaké jsou velikosti všech vnitřních úhlů v trojúhelníku $ABC$? (*E. Patáková*)

**Možné řešení.** Označíme vnitřní úhly v trojúhelníku $\alpha$, $\beta$ a $\gamma$, viz obrázek.




Součet vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku je 180°. Proto i v trojúhelníku $ASC$ platí

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} + 120^\circ = 180^\circ,$$

odkud dopočítáme

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}&=60^\circ,\\ \alpha+\gamma&=120^\circ. \end{aligned}$$

V trojúhelníku $ABC$ platí $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, odkud nyní umíme vyjádřit úhel $\beta$:

$$\beta=180^\circ-(\alpha+\gamma)=180^\circ-120^\circ=60^\circ.$$

Obdobně v trojúhelníku $BSC$:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{2}+130^\circ&=180^\circ,\\ \frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{2}&=50^\circ,\\ \gamma+\beta&=100^\circ. \end{aligned}$$

Protože $\beta=60^\circ$, musí být $\gamma=100^\circ-60^\circ=40^\circ$ a konečně $\alpha=120^\circ-40^\circ=80^\circ$ (alternativně $\alpha=180^\circ-100^\circ=80^\circ$).

**Hodnocení.** 2 body za určení součtu $\alpha+\gamma=120^\circ$, příp. $\gamma+\beta=100^\circ$; 4 body za určení velikostí všech vnitřních úhlů.

**Z7–II–3**

Trojmístné přirozené číslo budeme nazývat *sudomilé*, jestliže obsahuje dvě sudé číslice a číslici 1. Trojmístné přirozené číslo budeme nazývat *lichomilé*, jestliže obsahuje dvě liché číslice a číslici 2. Zjistěte, kolik je všech sudomilých a kolik lichomilých čísel.

(*E. Novotná*)

**Možné řešení.** Nejdřív určíme počet všech sudomilých čísel:

- Je-li číslice 1 na místě stovek, může být na místě desítek libovolná sudá číslice (0, 2, 4, 6, 8) a na místě jednotek stejně tak; to je celkem $5\cdot5=25$ možností.
- Je-li číslice 1 na místě desítek, může být na místě stovek libovolná nenulová sudá číslice (2, 4, 6, 8) a na místě jednotek libovolná sudá číslice; to nám dává dalších $4\cdot5=20$ možností.
- Je-li číslice 1 na místě jednotek, může být na místě stovek libovolná nenulová sudá číslice a na místě desítek libovolná sudá číslice; to nám dává dalších $4\cdot5=20$ možností.

Celkový počet sudomilých čísel je $25+20+20=65$.

Lichomilá čísla obsahují kromě 2 pouze liché číslice. Můžeme uvažovat stejně jako při počítání sudomilých čísel, avšak tentokrát lze v každém případě napočítat $5\cdot5=25$ možností (na každém volném místě může být libovolná lichá číslice 1, 3, 5, 7, 9). Celkový počet lichomilých čísel je $3\cdot25=75$.

**Hodnocení.** 4 body za určení počtu sudomilých čísel; 2 body za určení počtu lichomilých čísel.