II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

Divadelní soubor uvedl během sezony podle plánu třicet „Večerů s improvizacemi“. Fany, obdivovatelka hlavního protagonisty, si na začátku sezony spočítala, kolik by celkem utratila za vstupné, kdyby chodila na každé představení. Po několika uvedeních však bylo vstupné nečekaně zdraženo o 60 Kč. Později získal soubor významného sponzora a tuto novou cenu vstupného snížil o 85 Kč. Na konci sezony mohla Fany říci, že nevynechala ani jedno uvedení pořadu a za vstupné celkem utratila přesně tolik, kolik vypočítala na začátku sezony. Kolikrát Fany navštívila představení za vstupné v původní výši? (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Počet pořadů, kdy bylo vstupné zdražené o 60 Kč, označíme a. Fany za ně oproti svému předpokladu utratila o $60a$ Kč více. Po zlevnění bylo vstupné nižší než na počátku sezony, a to o $85 - 60 = 25$ Kč. Počet pořadů s tímto vstupným označíme b. Fany za ně zaplatila o $25b$ Kč méně, než původně plánovala. Celková vydaná částka odpovídá přesně plánu, proto musí platit:

$$60a = 25b.$$

Neznámé a, b jsou přirozená čísla. Rovnici upravíme do tvaru, z něhož bude zřejmý poměr těchto čísel:

$$\frac{a}{b} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}.$$

Neznámá a tedy musí být násobkem pěti a neznámá b musí být odpovídajícím násobkem dvanácti, viz tabulku:

a	5	10	15	...
b	12	24	36	...

Protože podle zadání nesmí součet $a + b$ přesáhnout 30, připouštíme pouze první možnost. Pořadů s obměněnou cenou vstupného bylo celkem $5 + 12 = 17$. Pořadů se vstupným v původní výši tak bylo $30 - 17 = 13$.

Hodnocení. 4 body za poznatek, že počty pořadů a a b jsou v poměru $5 : 12$ (z toho 2 body udělte podle úplnosti komentáře); 1 bod za diskusi, že řešení je jediné; 1 bod za správnou a jasně formulovanou odpověď.

Poznámka. Lze zvolit i delší postup, kdy do rovnice $60a - 25b = 0$ dosazujeme za a postupně přirozená čísla a vždy zkoumáme, zda b vychází také jako přirozené číslo. I za takovou práci lze udělit plný počet bodů, pokud ukazuje, že úloha má jediné řešení.

Z8–II–2

Najděte nejmenší přirozené číslo takové, aby jeho polovina byla dělitelná třemi, jeho třetina dělitelná čtyřmi, jeho čtvrtina dělitelná jedenácti a jeho polovina dávala po dělení sedmi zbytek pět. (*E. Patáková*)

Možné řešení. Je-li polovina čísla dělitelná třemi, pak číslo musí být dělitelné čísly 2 a 3 zároveň. Z obdobných důvodů musí být dělitelné i čísly 3 a 4 a také čísly 4 a 11.

Nejmenší společný násobek všech těchto čísel je součin $3 \cdot 4 \cdot 11 = 132$; hledané číslo musí být násobkem čísla 132. Polovina hledaného čísla je tudíž násobkem čísla 66, zbývá už jen ohlídat zbytek po dělení sedmi:

polovina hledaného čísla	zbytek po dělení sedmi
66	3
132	6
198	2
264	5

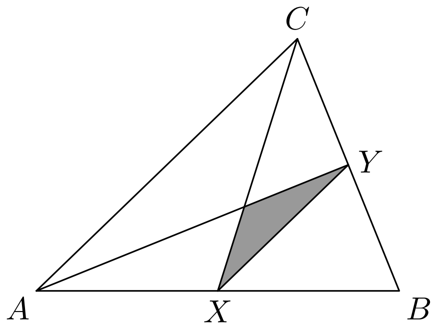
Nejmenší násobek čísla 66, jenž po dělení sedmi dává zbytek 5, je 264. Hledané číslo tedy je $2 \cdot 264 = 528$.

Hodnocení. 1 bod za rozklíčování zadání (např. že první informace znamená dělitelnost čísly 2 a 3); 3 body za nalezení nejmenšího společného násobku 132 a interpretaci, že hledané číslo je násobkem tohoto čísla, nebo jeho obdobu (pojem „násobek“ nemusí být výslovně uveden); 2 body za nalezení čísla 528 (z postupu musí být zřejmé vyloučení všech menších čísel).

Z8–II–3

Je dán trojúhelník ABC. Na straně AB leží bod X a na straně BC leží bod Y tak, že CX je těžnice, AY je výška a XY je střední příčka trojúhelníku ABC. Vypočítejte obsah šedého trojúhelníku na obrázku, je-li obsah trojúhelníku ABC roven $24\,\mathrm{cm}^2$.

(*M. Dillingerová*)



Možné řešení. Protože XY je střední příčka trojúhelníku ABC, musí být Y střed strany BC, a tedy úsečka AY není jen výška, ale rovněž i těžnice. Průsečík těžnic CX a AY je těžištěm trojúhelníku ABC, tento bod si označíme T.

Každá těžnice rozdělí trojúhelník na dva trojúhelníky se stejným obsahem (takto vzniklé trojúhelníky mají společnou výšku na stejně dlouhé strany): AY je těžnice trojúhelníku ABC, proto

$$S_{ABY} = S_{ACY} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{24}{2} = 12\,(\mathrm{cm}^2),$$

a podobně XY je těžnice trojúhelníku ABY, proto

$$S_{AXY} = S_{BXY} = \frac{1}{2} S_{ABY} = \frac{12}{2} = 6\,(\mathrm{cm}^2).$$

Trojúhelník AXY, jehož obsah známe, sestává z trojúhelníků AXT a YXT. Tyto dva trojúhelníky mají společnou výšku z bodu X, jejich obsahy jsou tudíž ve stejném poměru, v jakém je poměr délek stran AT a TY, tj. v poměru $2:1$ (těžiště dělí těžnici v poměru $2:1$). Obsah trojúhelníku YXT je tedy třetinový vzhledem k obsahu trojúhelníku AXY, proto je

$$S_{YXT} = \frac{1}{3} S_{AXY} = \frac{6}{3} = 2\,(\mathrm{cm}^2).$$

Hodnocení. 2 body za poznatek (včetně zdůvodnění), že AY je těžnice v trojúhelníku ABC; po 1 bodu za obsahy trojúhelníků ABY a AXY; 2 body za výsledný obsah trojúhelníku YXT (včetně jeho odvození nebo zdůvodnění).