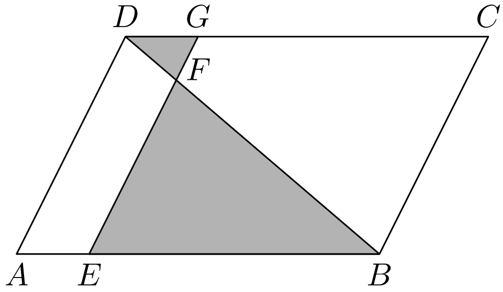
II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

Je dán kosodélník $ABCD$ jako na obrázku. Po straně AB se pohybuje bod E a po straně CD se pohybuje bod G tak, že úsečka EG je rovnoběžná s AD. Když byl průsečík F úseček EG a BD v pětině úhlopříčky BD (blíže k bodu D), byl obsah vybarvené části kosodélníku o $1\,\text{cm}^2$ větší, než když byl ve dvou pětinách (opět blíže k D). Určete obsah kosodélníku $ABCD$. (*E. Patáková*)



Možné řešení. Délku strany AB označíme a a velikost výšky kosodélníku $ABCD$ na tuto stranu označíme v; obsah kosodélníku je roven av. Trojúhelníky DGF a BEF jsou podobné podle věty uu (úhly DFG a BFE jsou vrcholové, úhly FEB a FGD střídavé). Dále označme v_1 velikost výšky trojúhelníku DGF na stranu DG a v_2 velikost výšky trojúhelníku BEF na stranu BE.

a) Bod F je v jedné pětině úhlopříčky BD. Poměr podobnosti trojúhelníků DGF a BEF je v tomto případě $1 : 4$. Pro odpovídající si výšky těchto trojúhelníků platí $v_1 + v_2 = v$. Z uvedeného plyne, že $v_1 = \frac{1}{5}v$ a $v_2 = \frac{4}{5}v$. Všimněme si, že $|DG| = |AE|$, a tedy že pro délky odpovídajících si stran těchto trojúhelníků platí $|DG| + |BE| = a$. Proto $|DG| = \frac{1}{5}a$ a $|BE| = \frac{4}{5}a$ a obsahy vybarvených trojúhelníků jsou:

$$S_{DGF} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}a \cdot \frac{1}{5}v\right) = \frac{1}{50}av,$$

$$S_{BEF} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}a \cdot \frac{4}{5}v\right) = \frac{16}{50}av.$$

Vybarvená část kosodélníku má v tomto případě obsah

$$S_{DGF} + S_{BEF} = \frac{17}{50}av.$$

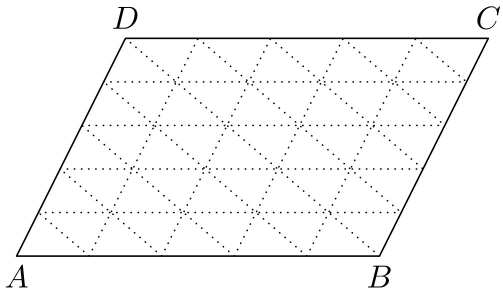
b) Bod F je ve dvou pětinách úhlopříčky BD. Poměr podobnosti trojúhelníků DGF a BEF je v tomto případě $2 : 3$. Obdobně jako v předchozím odstavci odvodíme, že $S_{DGF} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}a \cdot \frac{2}{5}v\right) = \frac{4}{50}av$ a $S_{BEF} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}a \cdot \frac{3}{5}v\right) = \frac{9}{50}av$. Vybarvená část kosodélníku má v tomto případě obsah

$$S_{DGF} + S_{BEF} = \frac{13}{50}av.$$

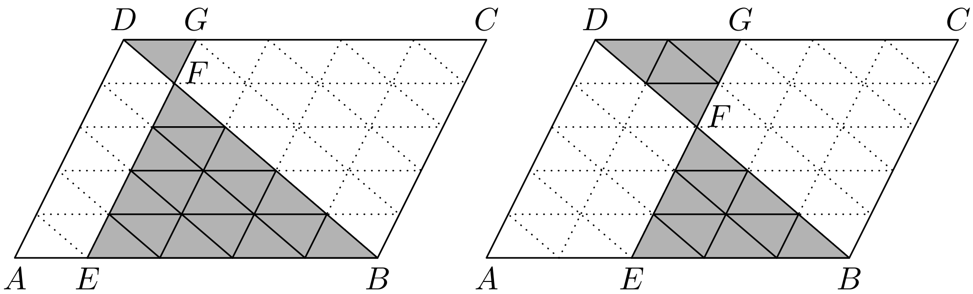
Ze zadání víme, že rozdíl $\frac{17}{50}av - \frac{13}{50}av = \frac{2}{25}av$ je právě $1\,\text{cm}^2$. Odtud plyne, že $av = \frac{25}{2}\,\text{cm}^2$. Obsah kosodélníku $ABCD$ je $12{,}5\,\text{cm}^2$.

Jiné řešení. Úsečky AB a BC rozdělíme na pětiny. Rovnoběžky s těmito úsečkami vedené vzniklými body rozdělí kosodélník $ABCD$ na 25 shodných kosodélníčků.

Vyznačíme-li ještě rovnoběžky s úhlopříčkou BD, bude kosodélník $ABCD$ rozdělen na 50 shodných trojúhelníčků, viz obrázek.



Je-li bod F v jedné pětině úhlopříčky BD, pak vybarvená část kosodélníku sestává ze 17 trojúhelníčků. Je-li bod F ve dvou pětinách úhlopříčky BD, vybarvená část kosodélníku v tomto případě sestává ze 13 trojúhelníčků.



Rozdíl $1\,\text{cm}^2$ odpovídá obsahu 4 trojúhelníčků. Obsah kosodélníku $ABCD$ je tedy roven $50 \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{2} = 12{,}5\,(\text{cm}^2)$.

Hodnocení. 1 bod za nalezení vlastnosti, pomocí které lze porovnat obsahy vybarvených trojúhelníků (např. podobnost, rozdělení na trojúhelníčky apod.); 3 body za vyjádření vztahu, ze kterého lze přesně určit rozdíl obsahů v daných situacích (např. rovnice plynoucí z podobnosti trojúhelníků, zjištění, o kolik trojúhelníčků se vybarvené části liší apod.); 2 body za dopočtení obsahu kosodélníku $ABCD$.

Z9–II–2

Sněhurka má na zahradě řadu 101 sádrových trpaslíků seřazených podle hmotnosti od nejtěžšího po nejlehčího, přičemž rozdíl hmotností každých dvou sousedních trpaslíků je stejný. Jednou Sněhurka trpaslíky vážila a zjistila, že první, nejtěžší, trpaslík váží přesně 5 kg. Sněhurku nejvíce překvapilo, že když na váhu postavila 76. až 80. trpaslíka, vážili dohromady tolik, co 96. až 101. trpaslík. Jaká je hmotnost nejlehčího trpaslíka?

(*M. Mach*)

Možné řešení. Označme rozdíl hmotností dvou sousedních trpaslíků jako x. První trpaslík váží 5 kg, druhý $5 - x$, třetí $5 - 2x$, $\ldots$, n-tý trpaslík váží $5 - (n-1) \cdot x$ (kg). Součet hmotností 76. až 80. trpaslíka je

$$(5 - 75x) + (5 - 76x) + (5 - 77x) + (5 - 78x) + (5 - 79x) = 25 - 385x.$$

Součet hmotností 96. až 101. trpaslíka je

$$(5 - 95x) + (5 - 96x) + (5 - 97x) + (5 - 98x) + (5 - 99x) + (5 - 100x) = 30 - 585x.$$

Dostáváme tedy rovnici, ze které vypočteme x:

$$\begin{aligned}25-385x&=30-585x,\\200x&=5,\\x&=0{,}025\ (\mathrm{kg}).\end{aligned}$$

Nejlehčí trpaslík váží $5-100\cdot 0{,}025=2{,}5$ (kg).

Jiné řešení. Označme rozdíl hmotností dvou sousedních trpaslíků jako x. První trpaslík váží 5 kg, druhý $5-x$, třetí $5-2x$, …, 101. trpaslík váží $5-100x$ (kg).

Rozdíl hmotností 76. a 96. trpaslíka je $20x$. Stejný rozdíl je i mezi 77. a 97., 78. a 98., 79. a 99., 80. a 100. trpaslíkem. Celková hmotnost 76. až 80. trpaslíka je tedy o $100x$ větší než celková hmotnost 96. až 100. trpaslíka. Aby 76. až 80. trpaslík vážili dohromady přesně tolik jako 96. až 101. trpaslík, musí být hmotnost 101. trpaslíka rovna $100x$.

Získáváme tedy rovnici, ze které jednoduše vypočteme x:

$$\begin{aligned}5-100x&=100x,\\200x&=5,\\x&=0{,}025\ (\mathrm{kg}).\end{aligned}$$

Nejlehčí trpaslík váží $100\cdot 0{,}025=2{,}5$ (kg).

Hodnocení. 4 body za sestavení rovnice umožňující výpočet rozdílu hmotností dvou sousedních trpaslíků; 2 body za úpravy rovnice a výsledek úlohy.

Poznámka. Ani u jednoho uvedeného řešení soutěžící nemusí nutně vypočítávat, že $x=0{,}025$ kg. Vystačí např. se zjištěním, že $100x=2{,}5$ kg.

Z9–II–3

Turistický oddíl pořádal třídenní cyklistický výlet. První den chtěli ujet $\frac{1}{3}$ celé trasy, ale bohužel ujeli o 4 km méně. Druhý den chtěli ujet víc, celou polovinu zbytku, ale bylo to nakonec zase o 2 km méně. Třetí den ale vše dohonili, ujeli $\frac{10}{11}$ zbytku cesty a ještě 4 km. Jak dlouhá byla trasa a kolik ujeli první, druhý a třetí den? (*M. Volfová*)

Možné řešení. Postupujeme úsudkem „odzadu“.

$\frac{1}{11}$ zbytku cesty po druhém dnu je rovna 4 km, tedy celý zbytek byl $11\cdot 4=44$ (km). Kdyby druhý den ujeli (jak plánovali) o 2 km více, byl by zbytek po druhém dnu o 2 km menší, tedy jen 42 km, a tvořil by polovinu toho, co po prvním dnu zbývalo do cíle. Po prvním dnu zbývalo do cíle 84 km.

Kdyby první den ujeli podle plánu celou $\frac{1}{3}$ trasy, tedy o 4 km více, byl by zbytek o 4 km menší, tj. jen 80 km, a představoval by $\frac{2}{3}$ celé trasy. $\frac{1}{3}$ trasy byla tedy 40 km a celá 120 km.

Provedeme shrnutí, při němž spočítáme ujeté vzdálenosti v jednotlivých dnech. První den chtěli ujet 40 km, ale ujeli jen 36 km; zbývalo jim do cíle 84 km. Druhý den chtěli ujet polovinu zbytku, tj. 42 km, ale ujeli jen 40 km; zbývalo jim 44 km. Třetí den ujeli $\frac{10}{11}$ zbytku, tj. 40 km, a ještě 4 km; byli tedy v cíli.

V jednotlivých dnech ujeli postupně 36 km, 40 km a 44 km, dohromady 120 km.

Jiné řešení. Postupujeme pomocí algebry „odpředu“; délku celé trasy v km označíme x.

První den ujeli $\frac{1}{3}x-4$, zbylo jim $\frac{2}{3}x+4$.

Druhý den ujeli $\frac{1}{2} \cdot (\frac{2}{3}x + 4) - 2 = \frac{1}{3}x$, zbylo jim $\frac{1}{3}x + 4$.
Třetí den ujeli $\frac{10}{11} \cdot (\frac{1}{3}x + 4) + 4 = \frac{10}{33}x + \frac{40}{11} + 4$.
Délka celé trasy tedy byla

$$x = \frac{1}{3}x - 4 + \frac{1}{3}x + \frac{10}{33}x + \frac{40}{11} + 4.$$

Po úpravách dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{33}x &= \frac{40}{11}, \\ x &= 120. \end{aligned}$$

Po dosazení do výše uvedených výrazů zjišťujeme, že v jednotlivých dnech ujeli postupně 36 km, 40 km a 44 km, dohromady tedy 120 km.

Hodnocení. Po 1 bodu za délku trasy první, druhý a třetí den a délku celé trasy; zbylé 2 body podle úplnosti komentáře.

Z9–II–4

Organizátor výstavy „Stavím, stavíš, stavíme" rozdělil expozici do dvou částí. Protože ho zajímala reakce návštěvníků výstavy, vyplnil každý návštěvník při odchodu jednoduchý dotazník. Vyplynuly z něj tyto zajímavé skutečnosti:

- 96 % návštěvníků, kterým se líbila první část, se líbila i druhá část,
- 60 % návštěvníků, kterým se líbila druhá část, se líbila i první část,
- 59 % návštěvníků se nelíbila ani první část, ani druhá část.

Kolik procent všech návštěvníků uvedlo, že se jim líbila první část výstavy?

(*M. Petrová*)

Možné řešení. Označíme n počet všech lidí, kteří navštívili výstavu, dále p počet návštěvníků, kterým se líbila první část výstavy, a d počet návštěvníků, kterým se líbila druhá část výstavy. Hledáme nějaký vztah mezi n a p, ze kterého již snadno odvodíme odpověď na otázku.

Vyjádříme počet návštěvníků, kterým se líbily obě části: z první podmínky to je $0{,}96p$, z druhé podmínky $0{,}6d$. Samozřejmě platí:

$$\begin{aligned} 0{,}96p &= 0{,}6d, \\ 96p &= 60d, \\ 8p &= 5d, \\ 1{,}6p &= d. \end{aligned}$$

Odtud můžeme vyjádřit počet lidí v jednotlivých skupinách pomocí p. Počet lidí, kterým se líbila

- první část, ale ne druhá část, je $p - 0{,}96p = 0{,}04p$,
- druhá část, ale ne první část, je $d - 0{,}6d = 0{,}4d = 0{,}4 \cdot 1{,}6p = 0{,}64p$,
- první i druhá část, je samozřejmě $0{,}96p$.

Sečtením zjistíme, kolika lidem se líbila aspoň jedna část výstavy:

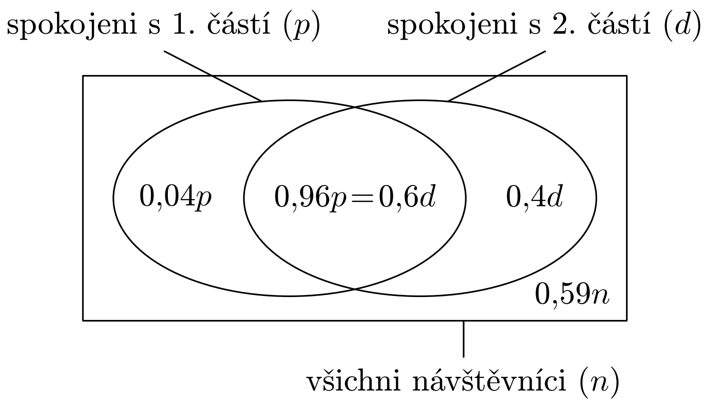
$$0{,}04p + 0{,}64p + 0{,}96p = 1{,}64p.$$

Podle třetí podmínky v zadání víme, že $0{,}59n$ návštěvníkům se nelíbila ani jedna část výstavy; tedy $0{,}41n$ návštěvníkům se alespoň jedna část výstavy líbila. Tento počet zároveň podle předchozího odpovídá $1{,}64p$. Sestavíme rovnici, kterou dále upravíme:

$$
\begin{aligned}
0{,}41n &= 1{,}64p,\\
41n &= 164p,\\
n &= 4p,\\
0{,}25n &= p.
\end{aligned}
$$

Odtud plyne, že 25 % všech návštěvníků uvedlo, že se jim líbila první část výstavy.

Vztahy mezi diskutovanými počty návštěvníků můžeme znázornit např. následujícím způsobem:



Hodnocení. 2 body za vyjádření $d = 1{,}6p$ či analogický vztah; 2 body za vyjádření počtu návštěvníků, kterým se líbila aspoň jedna část, pomocí počtu návštěvníků, kterým se líbila první část (nebo za analogický poznatek); 2 body za výsledných 25 %.