62. ročník Matematické olympiády

I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Maminka zaplatila v knihkupectví 2 700 Kč. Platila dvěma druhy bankovek, dvousetkorunovými a pětisetkorunovými, a přesně. Kolik kterých bankovek mohla použít? Uveďte všechny možnosti. (*M. Krejčová*)

Nápověda. Kolik pětisetkorunových bankovek lze použít, aby bylo možné doplatit zbytek dvousetkorunovými?

Možné řešení. Je zřejmé, že pětisetkorunových bankovek musela maminka použít méně než 6, protože $6 \cdot 500 = 3\,000$ (Kč). Probereme postupně všechny možnosti, tj. že použila pět, čtyři, atd. až žádnou pětisetkorunovou bankovku. Poté zjistíme, kolik korun by takto zaplatila a kolik by jí ještě zbývalo doplatit. Nakonec rozhodneme, zda by zbylou částku mohla doplatit pouze dvousetkorunovými bankovkami. Celou diskusi vyjádříme tabulkou:

počet 500Kč bankovek	5	4	3	2	1	0
zaplaceno	2 500	2 000	1 500	1 000	500	0
zbývá doplatit	200	700	1 200	1 700	2 200	2 700
počet 200Kč bankovek	1	—	6	—	11	—

Maminka mohla zaplatit třemi způsoby:

- 5 pětisetkorunových a 1 dvousetkorunová bankovka,
- 3 pětisetkorunové a 6 dvousetkorunových bankovek,
- 1 pětisetkorunová a 11 dvousetkorunových bankovek.

Poznámka. Podobně lze postupovat vzhledem k dvousetkorunovým bankovkám, kterých musí být méně než 14 ($14 \cdot 200 = 2\,800$); odpovídající tabulka bude v tomto případě podstatně delší.

Z5–I–2

Pat napsal na tabuli podivný příklad:

$$550 + 460 + 359 + 340 = 2\,012.$$

Mat to chtěl napravit, proto pátral po neznámém čísle, které by připočetl ke každému z pěti uvedených čísel, aby pak byl příklad početně správný. Jaké to bylo číslo? (*L. Hozová*)

Nápověda. Kolik čísel přičte Mat k levé a kolik k pravé straně rovnosti?

Možné řešení. Součet čtyř čísel na levé straně rovnosti je $550 + 460 + 359 + 340 = 1\,709$; to je o $2\,012 - 1\,709 = 303$ menší číslo než na pravé straně rovnosti. K levé straně přičteme

Matovo číslo celkem čtyřikrát, k pravé pouze jednou. Rozdíl 303 mezi oběma stranami musí tedy být vyrovnán třemi Matovými čísly. Hledané číslo je proto $303 : 3 = 101$.

Poznámka. Pro lepší názornost ještě uvádíme kontrolu předchozího výsledku: Po přičtení na levé straně dostáváme

$$(550 + 101) + (460 + 101) + (359 + 101) + (340 + 101) = 651 + 561 + 460 + 441 = 2\,113,$$

na pravé straně vychází

$$2\,012 + 101 = 2\,113.$$

Vidíme, že číslo 101 vyhovuje požadavkům. Současně se zde nabízí vhodné znázornění na rovnoramenných vahách.

Z5–I–3

Ruda dostal k narozeninám budík. Měl z něj radost a seřídil si jej podle přesného času. Od té doby každé ráno, když vstával (sobotu, neděli a prázdniny nevyjímaje), zmáčkl přesně na 4 sekundy tlačítko, kterým se osvětluje ciferník. Přitom si všiml, že po dobu stisknutí tlačítka je čas na budíku zastaven. Jinak se ale budík vůbec nezpožďuje ani nezrychluje. Odpoledne 11. prosince se Ruda podíval na svůj budík a zjistil, že ukazuje přesně o 3 minuty méně, než by měl.

Kdy dostal Ruda tento budík? (*M. Petrová*)

Nápověda. Kolikrát zmáčkl Ruda tlačítko?

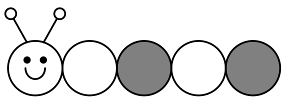
Možné řešení. Nejprve zjistíme, kolikrát zmáčkl Ruda tlačítko, kterým se osvětluje ciferník: Tlačítko držel pokaždé 4 sekundy a celkové zpoždění budíku nakonec bylo 3 minuty, tj. 180 sekund. Ruda tedy zmáčkl tlačítko celkem 45krát ($180 : 4 = 45$).

Každý den zmáčkl tlačítko ráno po probuzení. Nyní zjistíme, který den ho stiskl poprvé, a to tak, že zpětně odpočítáme 45 dní od 11. prosince: V prosinci (od 11. do 1.) to je 11 dní, listopad (od 30. do 1.) má 30 dní, což je celkem 41 dní. Potřebujeme odpočítat ještě 4 dny v říjnu: 31., 30., 29., 28.

Ruda zmáčkl osvětlovací tlačítko poprvé 28. října. Budík dostal o den dříve, tzn. 27. října.

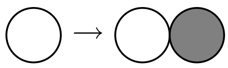
Z5–I–4

Červík se skládá z bílé hlavy a několika článků, viz obrázek.

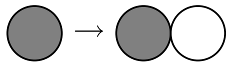


Když se červík narodí, má hlavu a jeden bílý článek. Každý den přibude červíkovi nový článek jedním z následujících způsobů:

- buď se některý bílý článek rozdělí na bílý a šedý:



- nebo se některý šedý článek rozdělí na šedý a bílý:

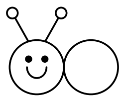


(V obou případech popisujeme situaci při pohledu na červíka od hlavy.) Čtvrtého dne červík dospívá a dále neroste — jeho tělo se skládá z hlavy a čtyř článků.

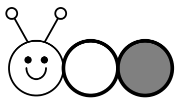
Kolik nejvíce různých barevných variant dospělých červíků tohoto druhu může existovat? (*E. Novotná*)

Nápověda. Jak může vypadat červík starý dva dny?

Možné řešení. První den svého života má červík jenom jeden bílý článek (a hlavu):

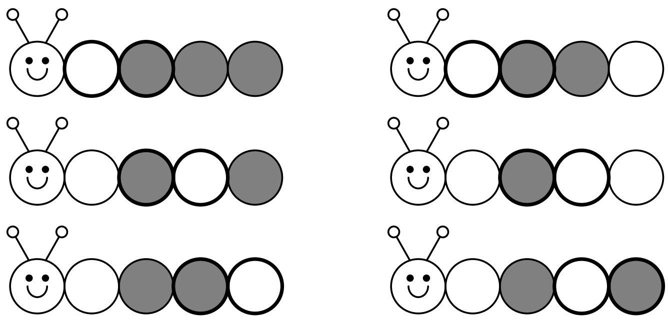


Druhý den mu proto může dorůst nový článek pouze prvním z uvedených způsobů; všichni červíci staří dva dny tedy vypadají stejně:



Třetího dne se může rozdělit buď první (bílý) nebo druhý (šedý) článek, jsou tedy dvě možnosti:

Čtvrtého dne se může u obou typů červíků z předchozího dne rozdělit kterýkoli z jeho tří článků, musíme tedy prověřit celkem 6 možností:



Porovnáním všech šesti dospělých červíků zjišťujeme, že mezi nimi jsou dvě dvojice stejných červíků, zbylí dva jsou odlišní od všech ostatních. Existují tedy právě čtyři různé barevné varianty dospělých červíků tohoto zajímavého druhu.

Z5–I–5

Vypočtěte $3 \cdot 15 + 20 : 4 + 1$.

Pak doplňte závorky do zadání tak, aby výsledek byl:

1. co největší celé číslo,
2. co nejmenší celé číslo.

(*M. Volfová*)

Nápověda. Zjistěte, kde všude mohou být umístěny závorky.

Možné řešení. Zadaný příklad bez jakýchkoli závorek vychází:

$$3 \cdot 15 + 20 : 4 + 1 = 45 + 5 + 1 = 51.$$

Nyní budeme umisťovat závorky a průběžně porovnávat výsledky. Snažíme se vyčerpat všechny možnosti, přitom budeme ignorovat závorky, které jsou zbytečné, např.

$$[3 \cdot (15 + 20)] : 4 + 1 = 3 \cdot (15 + 20) : 4 + 1$$

apod. Nejprve uvádíme možnosti s jednou závorkou, následně se dvěma. Umístit smysluplně tři a více závorek už nelze.

$(3 \cdot 15 + 20) : 4 + 1 = (45 + 20) : 4 + 1 = 65 : 4 + 1$ nelze dělit beze zbytku

$3 \cdot (15 + 20) : 4 + 1 = 3 \cdot 35 : 4 + 1 = 105 : 4 + 1$ nelze dělit beze zbytku

$3 \cdot (15 + 20 : 4) + 1 = 3 \cdot (15 + 5) + 1 = 3 \cdot 20 + 1 = 61$

$3 \cdot (15 + 20 : 4 + 1) = 3 \cdot (15 + 5 + 1) = 3 \cdot 21 = 63$

$3 \cdot 15 + 20 : (4 + 1) = 45 + 20 : 5 = 45 + 4 = 49$

$3 \cdot [(15 + 20) : 4 + 1] = 3 \cdot [35 : 4 + 1]$ nelze dělit beze zbytku

$3 \cdot [15 + 20 : (4 + 1)] = 3 \cdot [15 + 4] = 3 \cdot 19 = 57$

$(3 \cdot 15 + 20) : (4 + 1) = (45 + 20) : 5 = 65 : 5 = 13$

$3 \cdot (15 + 20) : (4 + 1) = 3 \cdot 35 : 5 = 105 : 5 = 21$

Největší číslo jsme získali takto:

$$3 \cdot (15 + 20 : 4 + 1) = 63,$$

nejmenší číslo jsme získali následovně:

$$(3 \cdot 15 + 20) : (4 + 1) = 13.$$

Poznámka. Děti budou zřejmě umisťovat závorky zkoušením. Nemusejí přitom ověřit všechny možnosti; je pravděpodobné, že budou vynechávat ty, kde nelze dělit beze zbytku, a že např. při hledání největšího čísla vynechají některé případy s tím, že „výsledek by byl moc malý“. Takové postupy uznávejte.

Za správné uznávejte i zdůvodnění, že k získání co největšího celého čísla chceme co nejmenšího dělitele a současně co největší výraz, který násobíme třemi; pro co nejmenší celé číslo uvažujeme opačně.

Pokud žáka napadne umístit začátek či konec závorky doprostřed dvojmístného čísla, může získat nejmenší číslo takto:

$$(3 \cdot 15 + 2)0 : (4 + 1) = 47 \cdot 0 : 5 = 0.$$

I takové řešení uznávejte.

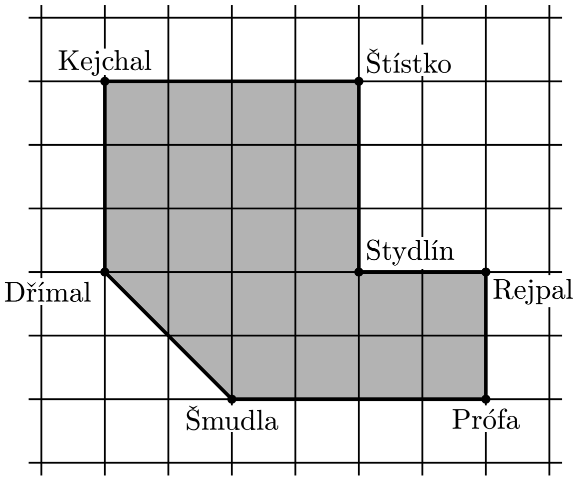
Z5–I–6

Sedm trpaslíků se postavilo po obvodu své zahrádky, do každého rohu jeden, a napnuli mezi sebou provaz kolem celé zahrady. Sněhurka vyšla od Šmudly a chodila podél provazu. Nejprve šla čtyři metry na východ, kde potkala Prófu. Od něj pokračovala dva metry na sever, než dorazila k Rejpalovi. Od Rejpala šla na západ a po dvou metrech natrefila na Stydlína. Dál pokračovala tři metry na sever, až došla ke Štístkovi. Vydala se na západ a po čtyřech metrech potkala Kejchala, odkud jí zbývaly tři metry na jih ke Dřímalovi. Nakonec podle provázku došla nejkratší cestou ke Šmudlovi a tím obešla celou zahradu.

Kolik metrů čtverečních má celá zahrada? (*M. Mach*)

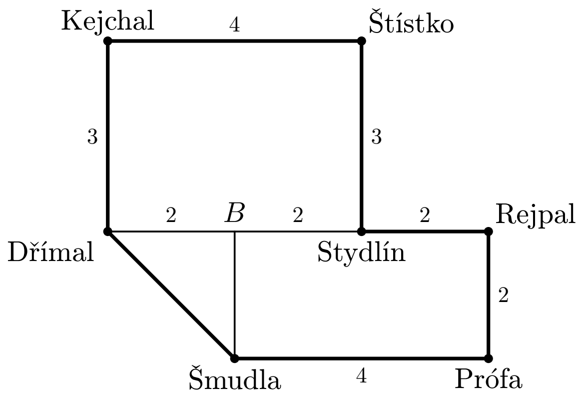
Nápověda. Zakreslete si tvar zahrady, nejlépe na čtverečkovaný papír.

Možné řešení. Nakreslíme si celou zahradu do čtvercové sítě, ve které jeden čtvereček představuje jeden metr čtvereční.



Nyní snadno určíme plochu obrazce. Nejdříve spočítáme všechny celé čtverečky — těch je ve vyznačené ploše 21. Ještě zbývá připočítat dva trojúhelníčky, které dohromady tvoří jeden další celý čtvereček. Napočítali jsme 22 čtverečků, zahrada má tedy $22\,\mathrm{m}^2$.

Jiné řešení. Pokud nemáme k dispozici čtverečkovaný papír, můžeme nákres zahrady rozdělit jako na následujícím obrázku; společný bod pomocných úseček označíme B a podle zadání doplníme velikosti potřebných stran (vše v metrech).



Odtud snadno určíme obsahy jednotlivých částí:

- Obdélník „Stydlín—Štístko—Kejchal—Dřímal“ má obsah $3 \cdot 4 = 12\,(\mathrm{m}^2)$.
- Obdélník „Šmudla—Prófa—Rejpal—B“ má obsah $4 \cdot 2 = 8\,(\mathrm{m}^2)$.
- Trojúhelník „Šmudla—Dřímal—B“ můžeme vidět jako polovinu čtverce o straně $2\,\mathrm{m}$ rozděleného úhlopříčkou; jeho obsah je tedy poloviční vzhledem k původnímu čtverci, tj. $(2 \cdot 2) : 2 = 2\,(\mathrm{m}^2)$.

Zahrádka trpaslíků má obsah $12 + 8 + 2 = 22\,(\mathrm{m}^2)$.

I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Libor si myslí trojmístné přirozené číslo, které má všechny své číslice liché. Pokud k němu přičte 421, dostane trojmístné číslo, které nemá ani jednu svou číslici lichou. Najděte všechna čísla, která si může Libor myslet. (*L. Šimůnek*)

Nápověda. Zapište si čísla pod sebe a uvažujte jako při písemném sčítání.

Možné řešení. Číslice myšleného čísla označíme po řadě L_1, L_2, L_3. Sčítání zmíněné v zadání ukazuje následující schéma:

$$\begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \\ 4 & 2 & 1 \\ \hline S_1 & S_2 & S_3 \end{array}$$

Pro každé liché L_3 je součet $L_3 + 1$ sudý. Avšak pro každé liché L_2 je součet $L_2 + 2$ lichý. Abychom přesto dostali ve výsledku ve sloupci desítek sudou číslici, musí při sčítání ve sloupci jednotek dojít k přechodu přes desítku. Tedy L_3 může být jedině 9.

Pro každé liché L_1 je součet $L_1 + 4$ lichý. Má-li přesto být ve výsledku ve sloupci stovek sudá číslice, musí při sčítání ve sloupci desítek dojít k přechodu přes desítku. Tedy L_2 může být pouze 9 a 7.

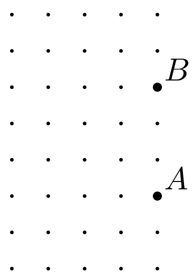
Při sčítání na místě stovek k přechodu přes desítku dojít nesmí, jelikož výsledek má být dle zadání trojmístný. Tedy L_1 může být jen 1 nebo 3.

Seskupením přípustných číslic dostáváme celkem čtyři čísla, která si Libor mohl myslet:

179, 199, 379 a 399.

Z6–I–2

Na obrázku jsou vyznačeny uzlové body čtverečkové sítě, z nichž dva jsou pojmenovány A a B. Bod C nechť je jeden ze zbylých uzlových bodů. Najděte všechny možné polohy bodu C tak, aby trojúhelník ABC měl obsah 4,5 čtverečku. (*E. Novotná*)

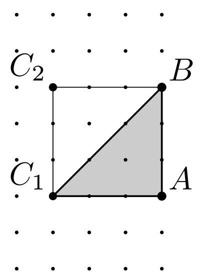


Nápověda. Obsah každého trojúhelníku lze vyjádřit pomocí obsahu (nejvýše) dvou pravoúhlých trojúhelníků.

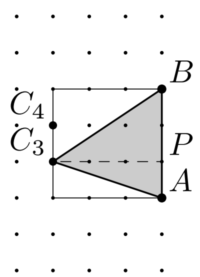
Možné řešení. Náhodným zkoušením uzlových bodů velmi brzy zjistíme, že potřebujeme diskutovat tři kvalitativně odlišné případy, kdy trojúhelník ABC je a) pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu A nebo B, b) ostroúhlý nebo c) tupoúhlý.

a) Předpokládejme, že trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu A nebo B. Budeme uvažovat první možnost, řešení ve druhém případě bude souměrné.

Takový trojúhelník tvoří právě polovinu pravoúhelníku, jehož jedna strana je AB a druhá AC. Obsah tohoto pravoúhelníku má být roven 9 čtverečkům. Velikost AB je 3 jednotky, bod C tedy musí být $9 : 3 = 3$ jednotky od A. Tento bod označíme C_1, souměrné řešení vlevo od bodu B je označeno C_2.

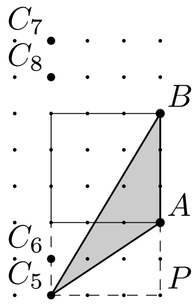


b) Předpokládejme nyní, že bod C je nějaký uzlový bod v pásu mezi přímkami AC_1 a BC_2. Trojúhelník ABC rozdělíme výškou na stranu AB na dva menší pravoúhlé trojúhelníky. Každý z těchto trojúhelníků je polovinou nějakého pravoúhelníku, viz obrázek. Tyto dva pravoúhelníky tvoří větší pravoúhelník, jehož obsah je dvojnásobkem obsahu trojúhelníku ABC. Jedna strana tohoto pravoúhelníku je AB a druhá je shodná s výškou CP. Hledáme tedy bod C tak, aby obsah takového pravoúhelníku byl 9 čtverečků. Zkoušením nebo úvahou jako výše odhalíme dvě řešení, jež jsou vyznačena jako C_3 a C_4:



c) Nakonec musíme diskutovat ještě možnosti, kdy bod C je nějaký uzlový bod vně pásu určeného přímkami AC_1 a BC_2. Trojúhelník ABC je v tomto případě tupoúhlý a výška na stranu AB jde mimo něj; patu této výšky označíme opět P. Budeme uvažovat pouze trojúhelníky s tupým úhlem u vrcholu A, zbylá řešení jsou souměrná.

Obsah trojúhelníku ABC je nyní rozdílem obsahů pravoúhlých trojúhelníků CPB a CPA. Každý z těchto trojúhelníků je polovinou vhodného pravoúhelníku, viz obrázek. Rozdíl obsahů těchto pravoúhelníků je tedy dvojnásobkem obsahu trojúhelníku ABC a je stejný jako obsah pravoúhelníku, jenž je na obrázku obtažen nepřerušovanou čarou. Jedna strana tohoto pravoúhelníku je AB a druhá je shodná s výškou CP. Hledáme tedy bod C tak, aby obsah takového pravoúhelníku byl 9 čtverečků. Zkoušením nebo úvahou jako výše odhalíme dvě řešení, jež jsou označena jako C_5 a C_6. Souměrná řešení nad přímkou BC_2 jsou C_7 a C_8.



Úloha má celkem 8 řešení, která jsme postupně označili $C_1, \ldots, C_8$.

Poznámky. Představa se součtovým pravoúhelníkem v odstavci b), příp. rozdílovým pravoúhelníkem v odstavci c), není nutná k úspěšnému dořešení úlohy. Stačí, když si řešitel uvědomí, že obsah trojúhelníku ABC je součtem, příp. rozdílem, obsahů pravoúhlých trojúhelníků CPB a CPA. Zdůvodnění, že např. vyznačený bod C_5 je řešením, pak může vypadat následovně:

$$S_{ABC_5} = \frac{3 \cdot 5}{2} - \frac{3 \cdot 2}{2} = \frac{9}{2}.$$

Všimněte si, že pro libovolný bod C na přímce C_1C_2 vyjde podle předchozích úvah obsah trojúhelníku ABC také 4,5 čtverečku. Vlastně jsme tak dokázali, že obsah libovolného trojúhelníku je roven polovině pravoúhelníku, který má jednu stranu společnou s trojúhelníkem a druhou shodnou s výškou na tuto stranu.

Pokud žák tento fakt již zná, je řešení obzvlášť snadné: stačí najít jeden vyhovující bod a všechny ostatní jsou právě uzlové body ležící na rovnoběžce s přímkou AB, která prochází tímto vyhovujícím bodem.

Z6–I–3

Obři Koloděj a Bobr mluví některé dny jenom pravdu a někdy jenom lžou. Koloděj mluví pravdu v pondělí, v pátek a v neděli, v ostatní dny lže. Bobr mluví pravdu ve středu, čtvrtek a pátek, ostatní dny lže.

1. Určete, kdy může Koloděj říci: „Včera jsem mluvil pravdu.“
2. Jednoho dne oba řekli: „Včera jsem lhal.“ V který den to bylo?

(*M. Volfová*)

Nápověda. Pomozte si přehlednou tabulkou, ze které by bylo patrné, kdy který obr lže a kdy ne.

Možné řešení. Informace ze zadání pro přehlednost vepíšeme do tabulky:

	Koloděj	Bobr
pondělí	+	−
úterý	−	−
středa	−	+
čtvrtek	−	+
pátek	+	+
sobota	−	−
neděle	+	−

1. Koloděj jistě může říci „včera jsem mluvil pravdu“ v pondělí, protože v pondělky mluví pravdu a o nedělích (včera) také. Jiná dvojice po sobě jdoucích dnů, kdy mluví pravdu, není. Pokud by Koloděj říkal tentýž výrok v den, kdy zrovna lže, znamenalo by to, že předchozí den ve skutečnosti lhal. To by se mohlo stát jedině ve středu nebo ve čtvrtek. Koloděj tedy může tvrdit „včera jsem mluvil pravdu“ v pondělí, ve středu nebo ve čtvrtek.

2. Podobně, pokud některý z obrů říká „včera jsem lhal,“ může to být buď v den, kdy mluví pravdu a současně předchozí den lhal, nebo naopak. Koloděj může tento výrok prohlásit v úterý, v pátek, v sobotu nebo v neděli; Bobr ve středu nebo v sobotu. Jediný den, kdy mohou oba tvrdit „včera jsem lhal,“ je sobota.

Z6–I–4

Eva má tři papírky a na každém z nich je napsáno jedno přirozené číslo. Když vynásobí mezi sebou dvojice čísel z papírků, dostane výsledky 48, 192 a 36. Která čísla jsou napsána na Eviných papírcích? (*E. Novotná*)

Nápověda. Všimněte si, že $192 = 48 \cdot 4$.

Možné řešení. Předpokládejme, že výsledek 48 dostaneme, když vynásobíme čísla z prvního a druhého papírku, výsledek 192 dostaneme z prvního a třetího papírku a výsledek 36 z druhého a třetího papírku.

Protože $192 = 48 \cdot 4$, číslo na třetím papírku musí být čtyřnásobkem čísla na druhém papírku. Na druhém papírku je tedy takové číslo, že když jej vynásobíme se svým čtyřnásobkem, dostaneme 36. To znamená, že kdybychom toto číslo vynásobili se sebou samým, dostaneme čtvrtinu předchozího výsledku, tj. 9. Na druhém papírku je tedy číslo 3. Na třetím papírku potom musí být $3 \cdot 4 = 12$ a na prvním $48 : 3 = 16$. Na Eviných papírcích jsou napsána tato čísla: 16, 3 a 12.

Jiná nápověda. Každé přirozené číslo lze napsat jako součin dvou přirozených čísel pouze konečně mnoha způsoby.

Jiné řešení. Stejně jako u předchozího řešení předpokládáme, že výsledek 48 dostaneme vynásobením čísel z prvního a druhého papírku, výsledek 192 dostaneme z prvního a třetího papírku a výsledek 36 z druhého a třetího papírku.

Číslo 36 můžeme napsat jako součin dvou přirozených čísel pouze pěti způsoby:

$$36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6.$$

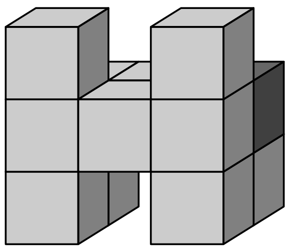
Přitom ze zadání víme, že na třetím papírku musí být větší číslo než na druhém papírku (součin čísel z prvního a třetího papírku je větší než součin čísel z prvního a druhého). Odtud máme pouze čtyři možné dvojice čísel na druhém a třetím papírku. Ze známých hodnot součinů čísel na papírcích dopočítáme dvojím způsobem číslo na prvním papírku, a pokud se tyto výsledky shodují, máme řešení.

2. číslo	3. číslo	1. číslo	
(x)	(y)	($48 : x$)	($192 : y$)
1	36	48	–
2	18	24	–
3	12	16	16
4	9	12	–

(Pomlčka značí, že čísla nelze dělit beze zbytku, tj. výsledek není přirozené číslo.) Vidíme jedinou vyhovující možnost: na Eviných papírcích jsou napsána čísla 16, 3 a 12.

Z6–I–5

Na obrázku je stavba složená z dvanácti shodných krychlí. Na kolik různých míst můžeme přemístit tmavou kostku, chceme-li, aby se povrch sestaveného tělesa nezměnil?

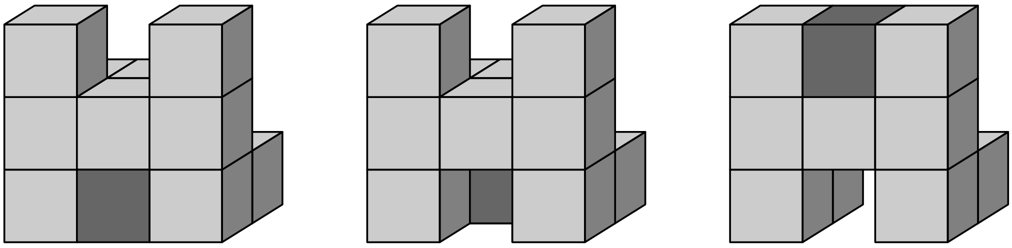


Stejně jako u původní stavby se i u stavby nové musejí kostky dotýkat celými stěnami. Polohu světlých kostek měnit nelze. (*D. Reichmann*)

Nápověda. Jak se změní povrch tělesa po odstranění tmavé kostky?

Možné řešení. Původně jsou na povrchu sestaveného tělesa tři stěny tmavé kostky, ostatní tři její stěny se dotýkají světlých kostek. Po odstranění tmavé kostky se celkový povrch tělesa nezmění (tři tmavé stěny jsou nahrazeny třemi světlými).

Aby se povrch tělesa nezměnil ani po přemístění tmavé kostky, musí se tato dotýkat právě tří světlých kostek (tři světlé stěny budou nahrazeny třemi tmavými). Zkoušením rychle zjistíme, že tmavou kostku můžeme přemístit jedině na následující tři místa:



Z6–I–6

Číšník v restauraci U Šejdíře vždy započítává platícímu hostovi do účtu i datum: celkovou utracenou částku zvětší o tolik korun, kolikátý den v měsíci zrovna je.

V září se v restauraci dvakrát sešla trojice přátel. Poprvé platil každý z nich zvlášť, číšník tedy vždy přičetl datum a žádal od každého 168 Kč. Za čtyři dny tam obědvali znovu a dali si přesně totéž co minule. Tentokrát však jeden platil za všechny dohromady. Číšník tedy připsal datum do účtu jen jednou a řekl si o 486 Kč. Přátelům se nezdálo, že ač se ceny v jídelním lístku nezměnily, mají oběd levnější než minule, a číšníkův podvod ten den odhalili. Kolikátého zrovna bylo? (*L. Šimůnek*)

Nápověda. Určete, jaká by byla jejich celková útrata, kdyby i podruhé zaplatil každý zvlášť.

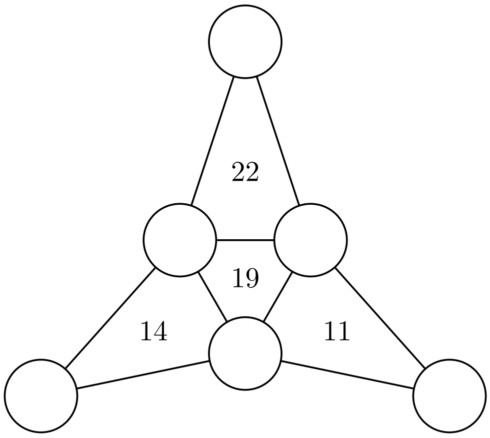
Možné řešení. Kdyby v den, kdy přátelé odhalili číšníkův podvod, platil každý zvlášť, řekl by si číšník od každého o $168+4 = 172$ (Kč). Celkem by tak zaplatili $3 \cdot 172 = 516$ (Kč). Tím, že platil jeden za všechny, se cena snížila o částku odpovídající dvěma datům. Tato cena je podle zadání 486 Kč. Dvěma datům tedy odpovídá částka $516 - 486 = 30$ (Kč). Číslo v datu je $30 : 2 = 15$; přátelé podvod odhalili 15. září.

Poznámka. Svůj výsledek si můžeme ověřit závěrečným shrnutím: Poprvé byli přátelé v restauraci 11. září. Každý měl podle jídelního lístku platit 157 Kč, platil však $157+11 = 168$ (Kč). Podruhé se v restauraci sešli 15. září. Jeden za všechny měl podle jídelního lístku zaplatit $3 \cdot 157 = 471$ (Kč), číšník si však řekl o $471 + 15 = 486$ (Kč).

I. kolo kategorie Z7

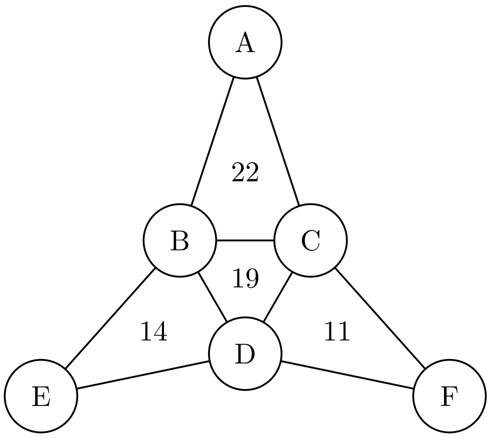
Z7–I–1

Na obrázku je šest kroužků, které tvoří vrcholy čtyř trojúhelníků. Napište do kroužků navzájem různá jednomístná přirozená čísla tak, aby v každém trojúhelníku platilo, že číslo uvnitř je součtem čísel napsaných v jeho vrcholech. Najděte všechna řešení. (*E. Novotná*)



Nápověda. Všímejte si dvojic trojúhelníků se společnou stranou.

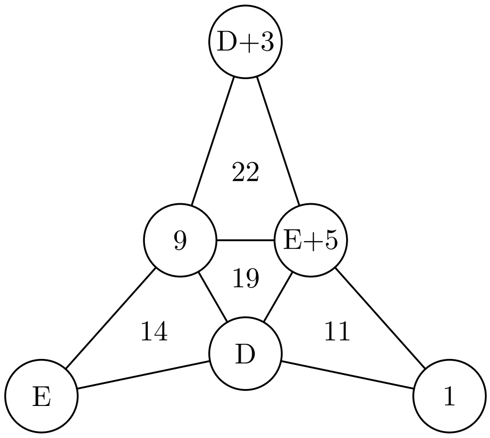
Možné řešení. Označme si čísla v kroužcích jako na následujícím obrázku. Budeme si postupně všímat dvojic trojúhelníků, které mají společnou stranu.



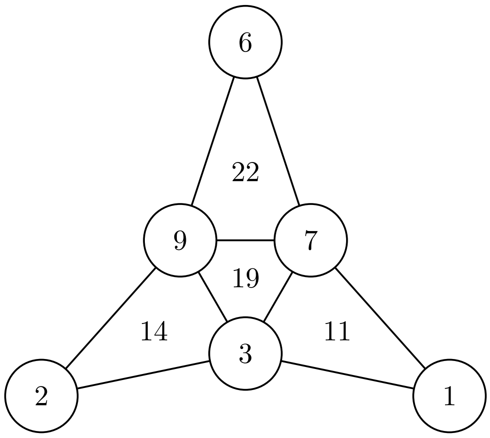
Trojúhelníky se společnou stranou DC: Protože součet čísel v trojúhelníku DCB je 19 a součet čísel v trojúhelníku DCF je 11, musí být číslo B o 8 větší než číslo F. V kroužcích mohou být jen přirozená čísla od 1 do 9, máme tedy jedinou možnost: $B = 9$ a $F = 1$.

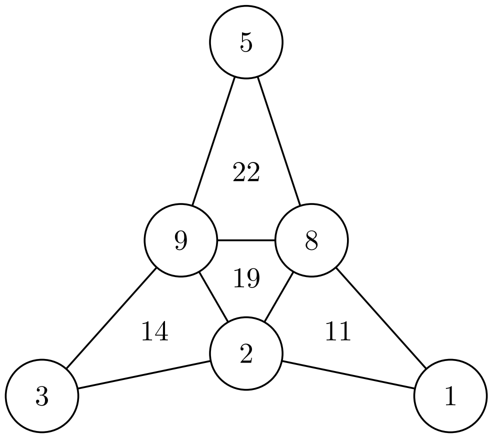
Porovnáme-li trojúhelníky se společnou stranou CB, zjistíme, že číslo A je o 3 větší než číslo D. Tuto dvojici neumíme zatím určit jednoznačně, proto píšeme $A = D + 3$.

Obdobně porovnáním trojúhelníků se společnou stranou BD určíme, že $C = E + 5$.



Z trojúhelníku se součtem čísel 19 teď vidíme, že $9 + E + 5 + D = 19$, tj. $E + D = 5$. Protože číslo 1 jsme již použili, musí být $E = 2$ a $D = 3$, nebo naopak. Každá ze dvou uvedených možností vede k jednomu řešení, jež vidíme na obrázcích níže. (V obou případech jsou čísla v kroužcích navzájem různá.)





Z7–I–2

Před naší školou je květinový záhon. Jednu pětinu všech květin tvoří tulipány, dvě devítiny narcisy, čtyři patnáctiny hyacinty a zbytek jsou macešky. Kolik květin je celkem na záhonu, jestliže od žádného druhu jich není více než 60 ani méně než 30? (*M. Petrová*)

Nápověda. Mohlo by být na záhonu např. 100 květin?

Možné řešení. Celkový počet květin musí být dělitelný pěti, protože jednu pětinu tvoří tulipány. Z podobného důvodu musí být počet všech květin dělitelný devíti (kvůli narcisům) a patnácti (kvůli hyacintům). Počet všech květin na záhonu je tedy nějaký společný násobek čísel 5, 9 a 15. Nejmenší společný násobek těchto tří čísel je 45, tudíž celkový počet květin je násobkem čísla 45.

V následující tabulce procházíme postupně násobky 45 a určujeme odpovídající počty jednotlivých druhů květin. Hledáme takový řádek, kde jsou všechny tyto počty v rozmezí od 30 do 60 (včetně).

celkem (c)	tulipány ($t = \frac{1}{5}c$)	narcisy ($n = \frac{2}{9}c$)	hyacinty ($h = \frac{4}{15}c$)	macešky ($m = c - t - n - h$)
45	9	10	12	14
90	18	20	24	28
135	27	30	36	42
180	**36**	**40**	**48**	**56**
225	45	50	60	70

Jediný vyhovující případ je zvýrazněn tučně. Se zvětšujícím se celkovým počtem květin se zvětšují i počty květin jednotlivých druhů, takže další výše neuvedené možnosti zřejmě výše uvedeným požadavkům nevyhovují. Na záhonu před školou máme celkem 180 květin.

Poznámka. Jakmile v řádku najdeme číslo menší než 30 nebo větší než 60, nemusíme ostatní položky dopočítávat — tato možnost totiž jistě nevyhovuje. Předchozí diskuse tedy může být úplná, i když tabulka je neúplná.

Jiné řešení. Nejprve dopočítáme, jakou část mezi všemi květinami zaujímají macešky:

$$1 - \frac{1}{5} - \frac{2}{9} - \frac{4}{15} = \frac{14}{45}.$$

Aby byl počet macešek přirozeným číslem, musí být počet všech květin násobkem čísla 45. V takovém případě jsou i počty ostatních květin přirozená čísla.

Počty všech jednotlivých druhů jsou v rozmezí od 30 do 60 (včetně), odkud umíme určit rozmezí celkového počtu květin:

Tulipány tvoří $\frac{1}{5}$ celkového počtu květin, tudíž počet všech květin musí být

$$\text{od } 30 \cdot 5 = 150 \text{ do } 60 \cdot 5 = 300,$$

podle poměrného zastoupení narcisů musí být počet všech květin

$$\text{od } 30 \cdot \frac{9}{2} = 135 \text{ do } 60 \cdot \frac{9}{2} = 270,$$

podle hyacintů musí být počet všech květin

$$\text{od } 30 \cdot \frac{15}{4} = 112{,}5 \text{ do } 60 \cdot \frac{15}{4} = 225$$

a podle macešek

$$\text{od } 30 \cdot \frac{45}{14} \doteq 96{,}4 \text{ do } 60 \cdot \frac{45}{14} \doteq 192{,}9.$$

Předchozí čtyři podmínky mají platit současně, tzn. celkový počet květin se pohybuje v rozmezí od 150 do 192 (včetně). Mezi těmito čísly je jediný násobek 45, totiž 180. Na záhonu roste celkem 180 květin.

Z7–I–3

Obři Bobr a Koloděj mluví některé dny jenom pravdu a některé dny jenom lžou. Bobr mluví pravdu pouze o víkendech, Koloděj mluví pravdu v pondělí, v pátek a v neděli, v ostatní dny lže.

Jednoho dne Bobr řekl: „Včera jsme oba lhali.“

Koloděj však nesouhlasil: „Aspoň jeden z nás mluvil včera pravdu.“

Který den v týdnu můžou obři vést takový rozhovor?

(*M. Volfová a V. Žádník*)

Nápověda. Pomozte si přehlednou tabulkou, ze které by bylo patrné, kdy který obr lže a kdy ne.

Možné řešení. Informace ze zadání pro přehlednost vepíšeme do tabulky:

	Bobr	Koloděj
pondělí	–	+
úterý	–	–
středa	–	–
čtvrtek	–	–
pátek	–	+
sobota	+	–
neděle	+	+

Bobr může tvrdit „včera jsme oba lhali“ buď v den, kdy mluví pravdu a současně předchozí den oba obři lhali (což se stát nemůže), nebo v den, kdy lže a současně předchozí den aspoň jeden z obrů mluvil pravdu (tj. v pondělí nebo v úterý). Bobr tedy může říci „včera jsme oba lhali“ jedině v pondělí nebo v úterý.

Koloděj může tvrdit „aspoň jeden z nás mluvil včera pravdu“ buď v den, kdy mluví pravdu a současně předchozí den aspoň jeden z obrů mluvil pravdu (tj. v pondělí nebo v neděli), nebo v den, kdy lže a současně předchozí den žádný z nich pravdu nemluvil (tj. ve středu nebo ve čtvrtek). Koloděj tedy může nesouhlasit „aspoň jeden z nás mluvil včera pravdu“ jedině v pondělí, ve středu, ve čtvrtek nebo v neděli.

Jediný den, kdy můžou obři vést uvedený rozhovor, je tudíž pondělí.

Z7–I–4

Paní učitelka napsala na tabuli následující čísla:

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43.$$

Dvě sousední čísla se liší vždy o stejnou hodnotu, v tomto případě o 3. Pak z tabule smazala všechna čísla kromě 1, 19 a 43. Dále mezi tato tři čísla dopsala několik celých čísel tak, že se každá dvě sousední čísla opět lišila o stejnou hodnotu a přitom žádné číslo nebylo napsáno dvakrát.

Kolika způsoby mohla paní učitelka čísla doplnit? (*K. Pazourek*)

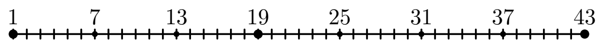
Nápověda. Může být mezi doplněnými čísly např. 5?

Možné řešení. Jeden ze způsobů, jak čísla doplnit, je samozřejmě ten, který paní učitelka smazala (v tomto případě je rozdíl sousedních čísel roven 3). Další možný, zřejmě nejjednodušší, způsob je doplnit všechna přirozená čísla od 1 do 43 (v tomto případě je rozdíl roven 1).

Každé doplnění podle zadání je zcela určeno rozdílem sousedních čísel, který si označíme d. Všechna možná doplnění lze tedy určit zkusmo uvažováním všech možných rozdílů d a kontrolou, zda v odpovídající posloupnosti (začínající 1) jsou obsažena také čísla 19 a 43.

Nicméně, aby v takové posloupnosti bylo obsaženo číslo 19, musí být rozdíl $19-1=18$ nějakým násobkem určující konstanty d. Podobně, aby v takové posloupnosti bylo obsaženo také číslo 43, musí být rozdíl $43-19=24$ nějakým násobkem čísla d. Jinými slovy, d musí být společným dělitelem čísel 18 a 24. Všechna možná doplnění tedy odpovídají všem společným dělitelům čísel 18 a 24, což jsou právě čísla 1, 2, 3 a 6. Paní učitelka mohla doplnit čísla na tabuli čtyřmi způsoby.

Poznámka. Předchozí úvahy můžou být vhodně podpořeny představou na číselné ose; zde je zvýrazněno dělení s největším možným rozdílem $d=6$:

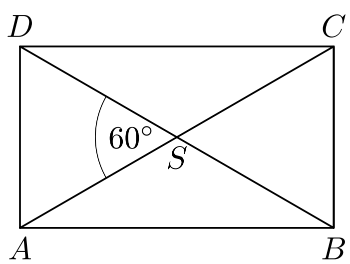


Z7–I–5

Ve sportovním areálu je upravená plocha tvaru obdélníku $ABCD$ s delší stranou AB. Úhlopříčky AC a BD svírají úhel 60°. Běžci trénují na velkém okruhu $ACBDA$ nebo na malé dráze ADA. Mojmír běžel desetkrát po velkém okruhu a Vojta patnáctkrát po malé dráze, tedy patnáctkrát v jednom směru a patnáctkrát v opačném. Oba dohromady uběhli 4,5 km. Jak dlouhá je úhlopříčka AC? (*L. Hozová*)

Nápověda. Je nějaký vztah mezi délkou úhlopříčky a délkou kratší strany obdélníku?

Možné řešení. Průsečík úhlopříček označíme S. Musíme rozhodnout, zda se zadaná velikost 60° vztahuje k úhlu ASB nebo ASD. Protože pro strany obdélníku platí $|AB|>|AD|$, musí být úhel ASB tupoúhlý a úhel ASD ostroúhlý. Velikost 60° tedy přísluší úhlu ASD.



V každém obdélníku jsou trojúhelníky ASD a BSC rovnoramenné a navzájem shodné, v našem případě jsou dokonce rovnostranné. To znamená, že úsečky AS, SC, CB, BS, SD a DA jsou shodné, jejich délku (v metrech) označíme s. Chceme určit délku úhlopříčky, jež při současném značení odpovídá hodnotě $2s$.

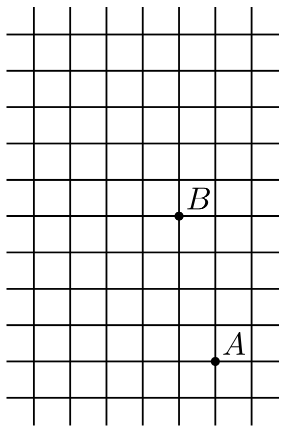
Délka velkého okruhu je tedy $6s$ a celková vzdálenost, kterou uběhl Mojmír, je $10 \cdot 6s = 60s$. Délka malé dráhy je $2s$ a celková vzdálenost, kterou uběhl Vojta, je $15 \cdot 2s = 30s$. Oba dohromady tedy naběhali $60s+30s = 90s$, což je podle zadání rovno 4,5 km = 4 500 m. Platí tedy

$$90s = 4\,500,$$

odkud plyne $2s = 100$. Délka úhlopříčky je 100 m.

Z7–I–6

Máme čtverečkovou síť se 77 uzlovými body. Dva z nich jsou označeny A a B jako na obrázku. Bod C nechť je jeden ze zbylých uzlových bodů. Najděte všechny možné polohy bodu C tak, aby trojúhelník ABC měl obsah 6 čtverečků. (*E. Novotná*)



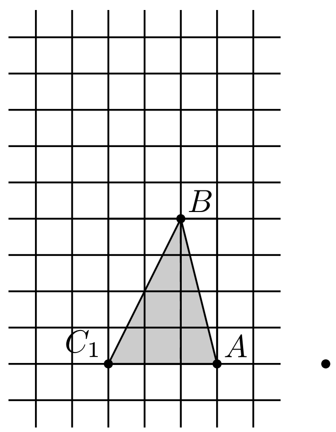
Nápověda. Zkoušejte nejdřív takové body, aby některá strana trojúhelníku ležela na nějaké přímce tvořící čtverečkovou síť.

Možné řešení. Pokud hledáme řešení zkusmo, nejspíš začneme zkoušet uzlové body tak, jak naznačuje nápověda. Uvažujme nejprve uzlové body na vodorovné přímce jdoucí bodem A; polohu bodu C počítáme od A doleva:

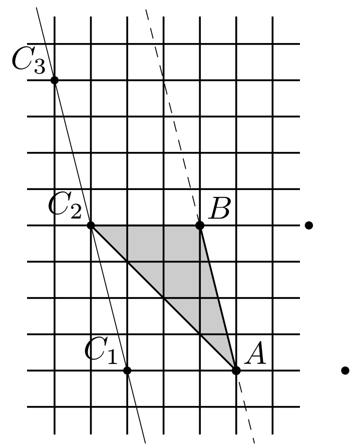
1. trojúhelník je pravoúhlý a jeho obsah je zřejmě 2 čtverečky, což je málo,
2. výška z bodu B rozděluje trojúhelník na dva (shodné) pravoúhlé trojúhelníky, obsah je $2 + 2 = 4$ čtverečky, což je pořád málo,
3. výška z bodu B rozděluje trojúhelník na dva (neshodné) pravoúhlé trojúhelníky, obsah je $4 + 2 = 6$ čtverečků a máme první vyhovující řešení, které označíme C_1.

Tentýž bod lze najít i bez zkoušení, pokud si včas uvědomíme, že obsah každého diskutovaného trojúhelníku je roven polovině obsahu pravoúhelníku, jehož jedna strana je AC a druhá je rovna 4 jednotkám (velikost výšky z bodu B), viz obrázek. Hledáme tedy takový uzlový bod na myšlené přímce, aby obsah odpovídajícího pravoúhelníku byl roven

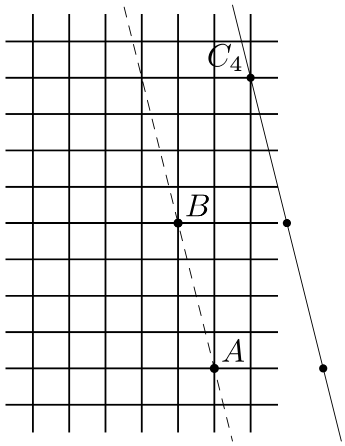
12 čtverečkům. Bod C tedy musí být $12 : 4 = 3$ jednotky od A, a abychom neopustili vyznačenou oblast, musíme mířit doleva.



Velmi podobným způsobem lze zdůvodnit i další řešení na vodorovné přímce procházející bodem B, které označíme C_2. (Souměrný bod podle B opět vychází mimo vyznačenou oblast.) Přímka C_1C_2 je rovnoběžná s AB, tudíž každý trojúhelník ABC, jehož vrchol C leží na této přímce, má tutéž výšku na stranu AB, tedy i tentýž obsah. Hledáme tedy takové uzlové body, které současně leží na přímce C_1C_2. Takto nalézáme bod, který je označen C_3.



Analogickou úvahou v opačné polorovině vymezené přímkou AB zjistíme, že zbylá řešení jsou právě ty uzlové body, jež současně leží na vyznačené bezejmenné přímce. Takto nalézáme poslední vyhovující bod, který je označen C_4.



Úloha má celkem 4 řešení, která jsme postupně označili C_1, C_2, C_3 a C_4.

Poznámky. V uvedeném řešení předpokládáme znalost faktu, že obsah libovolného trojúhelníku je roven polovině pravoúhelníku, který má jednu stranu společnou s trojúhelníkem a druhou shodnou s výškou na tuto stranu. Jednoduché zdůvodnění tohoto tvrzení je v podstatě ukázáno v řešení úlohy Z6–I–2.

I bez této dovednosti lze úlohu dořešit zkoušením, jak jsme naznačili v úvodu. Obsah libovolného trojúhelníku ABC s vrcholy v uzlových bodech lze vždy vyjádřit následovně:

- trojúhelníku ABC opíšeme pravoúhelník, jehož strany leží na přímkách tvořících čtverečkovou síť,
- pokud je to nutné, rozdělíme doplňkové plochy k trojúhelníku v opsaném pravoúhelníku na pravoúhlé trojúhelníky, příp. pravoúhelníky,
- obsah trojúhelníku vyjádříme jako rozdíl obsahu opsaného pravoúhelníku a obsahů jednotlivých doplňkových částí z předchozího kroku.

Výpočet obsahů některých trojúhelníků by podle tohoto návodu vypadal následovně (viz obrázky výše):

$$
\begin{aligned}
S_{ABC_1} &= 3 \cdot 4 - \frac{2 \cdot 4}{2} - \frac{1 \cdot 4}{2} = 12 - 6 = 6,\\
S_{ABC_2} &= 4 \cdot 4 - \frac{4 \cdot 4}{2} - \frac{1 \cdot 4}{2} = 16 - 10 = 6,\\
S_{ABC_3} &= 5 \cdot 8 - \frac{5 \cdot 8}{2} - \frac{4 \cdot 4}{2} - 1 \cdot 4 - \frac{1 \cdot 4}{2} = 40 - 34 = 6,\\
S_{ABC_4} &= 2 \cdot 8 - \frac{1 \cdot 4}{2} - \frac{2 \cdot 4}{2} - \frac{1 \cdot 8}{2} = 16 - 10 = 6.
\end{aligned}
$$

Všimněte si, že ani při tomto postupu není nutné vyčerpávat všechny možnosti: máme-li např. zjištěno, že bod C_2 je řešením, jistě již nemusíme uvažovat takové uzlové body, kdy by odpovídající trojúhelník buď obsahoval trojúhelník ABC_2 nebo byl jeho částí (v prvém případě by vzniklý trojúhelník měl větší než požadovaný obsah, v druhém případě menší).

I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Součin tří přirozených čísel je 600. Kdybychom jednoho činitele zmenšili o 10, zmenšil by se součin o 400. Kdybychom místo toho jednoho činitele zvětšili o 5, zvětšil by se součin na dvojnásobek původní hodnoty. Která tři přirozená čísla mají tuto vlastnost?

(*L. Hozová*)

Nápověda. Z každé oznamovací věty v zadání lze přímo určit jednoho činitele.

Možné řešení. Pracujme nejprve s druhou větou: zmenšením jednoho činitele o 10 se zmenší součin o 400. Přitom 400 jsou dvě třetiny z 600, tedy 10 musejí být dvě třetiny ze zmíněného činitele. Tím je proto číslo 15.

Dále pracujme s třetí větou: zvětšením jednoho činitele o 5 se zvětší součin na dvojnásobek. Zvětšením o 5 se tedy tento činitel zvětší také na dvojnásobek. Činitel je proto 5.

Z první věty zadání víme, že součin všech činitelů je 600, dva z nich uvádíme výše, třetí je $600 : 15 : 5 = 8$.

Informacím ze zadání vyhovují čísla 5, 8 a 15.

Jiná nápověda. Zadání vede ke třem rovnicím o třech neznámých.

Jiné řešení. Protože ze zadání není jasné, zda zmenšujeme/zvětšujeme jednoho a téhož činitele nebo pokaždé jiného, musíme probrat obě možnosti. V každém případě si hledaná přirozená čísla označíme x, y a z.

1. Předpokládejme, že se v zadání mluví o dvou různých činitelích. V takovém případě můžeme informace ze zadání přepsat následovně:

$$\begin{aligned} xyz &= 600,\\ (x-10)yz &= 200,\\ x(y+5)z &= 1\,200. \end{aligned}$$

Druhá rovnost po roznásobení je $xyz - 10yz = 200$. Jelikož $xyz = 600$, po úpravě dostáváme $10yz = 400$, tj. $yz = 40$. Z rovnosti $xyz = 600$ nyní plyne $x \cdot 40 = 600$, tj.

$$x = 15.$$

Podobně, třetí rovnost po roznásobení je $xyz + 5xz = 1\,200$. Jelikož $xyz = 600$, po úpravě dostáváme $5xz = 600$, tj. $xz = 120$. Protože již známe $x = 15$, musí být

$$z = 8.$$

Dosazením opět do rovnosti $xyz = 600$ máme $120y = 600$, odkud plyne

$$y = 5.$$

2. Předpokládejme, že se v zadání mluví dvakrát o stejném činiteli. V takovém případě můžeme psát:

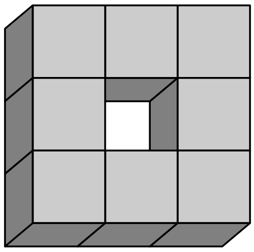
$$\begin{aligned} xyz &= 600, \\ (x-10)yz &= 200, \\ (x+5)yz &= 1\,200. \end{aligned}$$

Stejně jako výše roznásobíme druhou, resp. třetí rovnost, dosadíme $xyz = 600$ a po úpravě obdržíme $10yz = 400$, tj. $yz = 40$, resp. $5yz = 600$, tj. $yz = 120$. Jelikož $40 \neq 120$, vidíme, že výchozí předpoklad nemůže být splněn.

V zadání se mluví o dvou různých činitelích; uvažovanou vlastnost mají právě tato tři přirozená čísla: 5, 8 a 15.

Z8–I–2

Standa si složil 7 shodných útvarů, každý slepený z 8 stejných šedých krychliček o hraně 1 cm tak jako na obrázku.



Potom všechny ponořil do bílé barvy a následně každý z útvarů rozebral na původních 8 dílů, které tak měly některé stěny šedé a jiné bílé. Přidal k nim ještě 8 nových krychliček, jež byly stejné jako ostatní, akorát celé bílé. Ze všech kostek dohromady poskládal jednu velkou krychli a snažil se přitom, aby co největší část povrchu vzniklé krychle byla šedá. Kolik cm^2 povrchu bude jistě bílých? (*M. Mach*)

Nápověda. Nejdřív zjistěte, kolik kterých krychliček má Standa před vlastním skládáním k dispozici.

Možné řešení. Potřebujeme určit, z jakých krychliček Standa skládal svoji velkou krychli. Rohové krychličky z rozložených obílených útvarů mají jednu dvojici sousedních stěn šedou, zbytek bílý; celkem jich je $7 \cdot 4 = 28$. Ostatní krychličky z těchto útvarů mají jednu dvojici protilehlých stěn šedou, zbytek bílý; celkem jich je také $7 \cdot 4 = 28$. K těmto krychličkám se ještě přidalo 8 celých bílých.

Standa měl k dispozici celkem 64 krychliček, skládal tedy krychli s „hranou 4 kostičky“ ($4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$). Nyní určíme počty krychliček ve velké krychli podle počtu viditelných stěn: Rohové kostičky mají viditelné tři stěny; těch je celkem 8. Na hranách krychle jsou krychličky s dvěma viditelnými stěnami; celkem jich je $12 \cdot 2 = 24$. Ve stěnách krychle jsou krychličky s jednou viditelnou stěnou; celkem jich je $6 \cdot 4 = 24$. Uvnitř krychle je 8 krychliček, které nejsou vidět vůbec.

Z rozřezaných útvarů Standa nezískal žádné krychličky, které by měly 3 šedé stěny. Zřejmě tedy celou šedou krychli sestavit nemohl, přestože celková šedá plocha na krychličkách je větší než povrch velké krychle. My samozřejmě nevíme, jak Standa krychli skládal, nicméně, aby co největší část povrchu byla šedá, mohl postupovat např. takto:

- všech 8 čistě bílých krychliček umístí doprostřed,
- 24 krychliček se sousedními šedými stěnami použije na hrany velké krychle,
- zbylé 4 krychličky se sousedními šedými stěnami umístí do některých vrcholů (tímto dostane na povrch velké krychle 4 bílé plošky),
- 24 krychliček s protilehlými šedými stěnami použije do stěn velké krychle,
- zbylé 4 krychličky s protilehlými šedými stěnami umístí do zbylých vrcholů (na povrchu přibude 8 bílých plošek).

Při tomto postupu by na povrchu velké krychle bylo 12 bílých plošek, tj. $12\,\mathrm{cm}^2$.

Aby bylo zřejmé, že lépe už krychli složit nelze, všimněme si následujících skutečností: Žádnou z krychliček, které mají protilehlé stěny šedé, nikdy nelze ve velké krychli umístit tak, aby obě šedé stěny byly vidět — použitím všech těchto kostiček lze tedy obsáhnout nejvýše $28\,\mathrm{cm}^2$ šedé plochy na povrchu velké krychle. Krychličky, které mají sousední stěny šedé, naopak lze umístit tak, aby obě šedé stěny byly vidět — použitím všech těchto kostiček lze obsáhnout nejvýše $56\,\mathrm{cm}^2$ šedé plochy na povrchu velké krychle. Na povrchu velké krychle může být nejvýše $28 + 56 = 84\,(\mathrm{cm}^2)$ šedé plochy. Povrch celé krychle je $6 \cdot 4 \cdot 4 = 96\,(\mathrm{cm}^2)$; na jejím povrchu tedy nemůže být méně než $96 - 84 = 12\,(\mathrm{cm}^2)$ bílých.

Předchozí postup ukazuje jednu z možností, jak tento výsledek realizovat. Ať už Standa postupoval jakkoli, $12\,\mathrm{cm}^2$ povrchu krychle bude jistě bílých.

Z8–I–3

Děda zapomněl čtyřmístný kód svého mobilu. Věděl jen, že na prvním místě nebyla nula, že uprostřed byly buď dvě čtyřky nebo dvě sedmičky nebo taky čtyřka se sedmičkou (v neznámém pořadí) a že šlo o číslo dělitelné číslem 15. Kolik je možností pro zapomenutý kód? Jaká číslice mohla být na prvním místě? (*M. Volfová*)

Nápověda. Začněte prostředním dvojčíslím, poté uvažujte ostatní podmínky ze zadání.

Možné řešení. Prostřední dvě místa mohou být obsazena právě čtyřmi způsoby:

$$*44*,\ *77*,\ *47*,\ *74*.$$

Číslo je dělitelné 15 právě tehdy, když je dělitelné třemi a zároveň pěti. Přitom číslo je dělitelné pěti právě tehdy, když jeho poslední číslice je buď 0 nebo 5, a číslo je dělitelné třemi právě tehdy, když jeho ciferný součet je dělitelný třemi.

Je-li poslední číslice 0, pak uvažujeme následující možnosti

$$*440,\ *770,\ *470,\ *740$$

a hledáme první číslici tak, aby ciferný součet byl dělitelný třemi. Ve všech případech vychází tatáž možná trojice: 1, 4 nebo 7.

Je-li poslední číslice 5, pak uvažujeme podobně pro následující možnosti

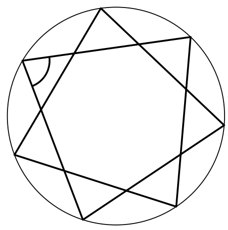
$$*445,\ *775,\ *475,\ *745.$$

Ve všech případech vychází tatáž možná trojice: 2, 5 nebo 8.

Podmínkám ze zadání vyhovuje $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ možností. Na prvním místě může být kterákoli číslice kromě 3, 6 a 9.

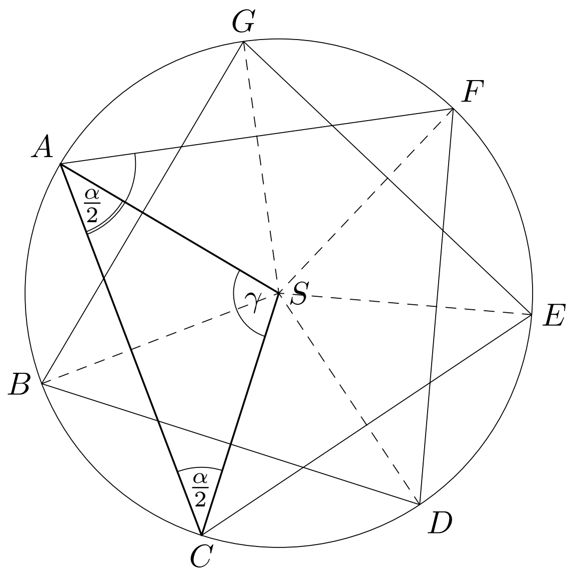
Z8–I–4

Je dána pravidelná sedmicípá hvězda podle obrázku. Jaká je velikost vyznačeného úhlu? (*E. Patáková*)



Nápověda. Hledejte rovnoramenné trojúhelníky, u kterých umíte určit velikosti vnitřních úhlů.

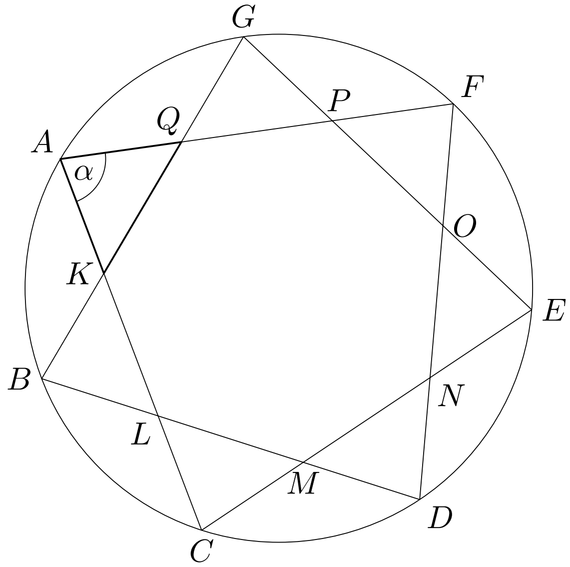
Možné řešení. Hledaný úhel budeme nazývat α. Dále označme vrcholy a střed hvězdy jako na obrázku. Spojíme-li všechny vrcholy se středem S, vidíme spoustu rovnoramenných trojúhelníků, z nichž mnohé jsou navzájem shodné. Např. trojúhelníky ASC, BSD, ..., GSB jsou shodné: všechny tyto trojúhelníky mají shodná ramena a úhel u vrcholu S (jehož velikost je rovna dvojnásobku velikosti úhlu ASB, tj. $\gamma = 2 \cdot \frac{360°}{7}$). Úhel α je proto roven dvojnásobku úhlu u vrcholu A v trojúhelníku ASC. Protože je tento trojúhelník rovnoramenný, je úhel α stejný jako součet vnitřních úhlů u vrcholů A a C.



Součet velikostí vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku je 180°, proto platí $\alpha+\gamma=$ $=180°$, odkud snadno dopočítáme velikost úhlu α:

$$\alpha = 180° - \frac{2}{7}\cdot 360° = \left(1-\frac{4}{7}\right)\cdot 180° = \left(77\frac{1}{7}\right)^{\circ} \doteq 77°8'34''.$$

Poznámka. Pokud znáte nebo umíte zdůvodnit, že velikost vnitřního úhlu v pravidelném sedmiúhelníku je rovna $\frac{5}{7}\cdot 180°$, pak lze úlohu dořešit následovně.



Vnitřní úhly u vrcholů K a Q v rovnoramenném trojúhelníku KAQ jsou vnějšími úhly pravidelného sedmiúhelníku $KLMNOPQ$; jejich velikost je proto $180° - \frac{5}{7}180° = \frac{2}{7}180°$. Součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku KAQ je $\alpha + \frac{4}{7}180° = 180°$, odkud vyjádříme neznámou: $\alpha = \left(1-\frac{4}{7}\right)\cdot 180° = \ldots$

Z8–I–5

1. září 2007 byla založena jazyková škola, ve které vyučovalo sedm pedagogů. 1. září 2010 k těmto sedmi učitelům přibyl nový kolega, kterému bylo právě 25 let. Do 1. září 2012 jeden z učitelů ze školy odešel, a tak jich zůstalo opět sedm. Průměrný věk pedagogů na škole byl ve všechna tři zmíněná data stejný.

Kolik let bylo 1. září 2012 učiteli, který ve škole už nepracoval? Jaký byl ten den průměrný věk učitelů na škole? (*L. Šimůnek*)

Nápověda. Pracujte se součtem věků všech zaměstnaných učitelů. Uvažujte, jak se tento součet mění vzhledem ke zmiňovaným datům.

Možné řešení. Součet věků všech sedmi učitelů školy k 1. září 2007 označíme c. Součet věků těchto sedmi lidí se ke dni 1. září 2010 zvětšil o $7\cdot 3 = 21$, součet věků všech osmi učitelů pracujících v tento den na škole byl tedy

$$c + 21 + 25 = c + 46.$$

Součet věků těchto osmi lidí se ke dni 1. září 2012 zvětšil o $8 \cdot 2 = 16$. V tento den jeden z nich už na škole nepracoval, jeho věk v tu dobu označíme x. Součet věků sedmi zbývajících učitelů byl v tento den roven

$$c + 46 + 16 - x = c + 62 - x.$$

Protože má být průměrný věk učitelů na škole ve všechna zmíněná data stejný, platí rovnosti

$$\frac{c}{7} = \frac{c+46}{8} = \frac{c+62-x}{7}.$$

Z rovnosti mezi prvním a třetím lomeným výrazem přímo plyne, že $x = 62$. Učiteli, který 1. září 2012 už na škole nepracoval, bylo tedy zrovna 62 let.

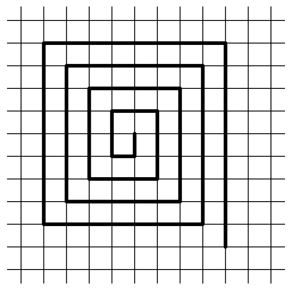
Úpravami rovnosti mezi prvními dvěma lomenými výrazy dojdeme k hodnotě c:

$$\begin{aligned} \frac{c}{7} &= \frac{c+46}{8}, \\ 8c &= 7c + 7 \cdot 46, \\ c &= 322. \end{aligned}$$

Průměrný věk učitelů ve všechna tři zmíněná data byl $322 : 7 = 46$ let.

Z8–I–6

Anička a Hanka chodily v labyrintu po spirálovité cestičce, jejíž začátek je schematicky znázorněn na obrázku. Strana čtverečku ve čtvercové síti má délku 1 m a celá cestička od středu bludiště až k východu je dlouhá 210 m.



Děvčata vyšla ze středu bludiště, nikde se nevracela a po čase každá zastavila v některém z rohů. Anička přitom ušla o 24 m více než Hanka. Ve kterých rozích mohla děvčata stát? Určete všechna řešení. (*E. Novotná*)

Nápověda. Nejdřív určete délky všech úseků bludiště.

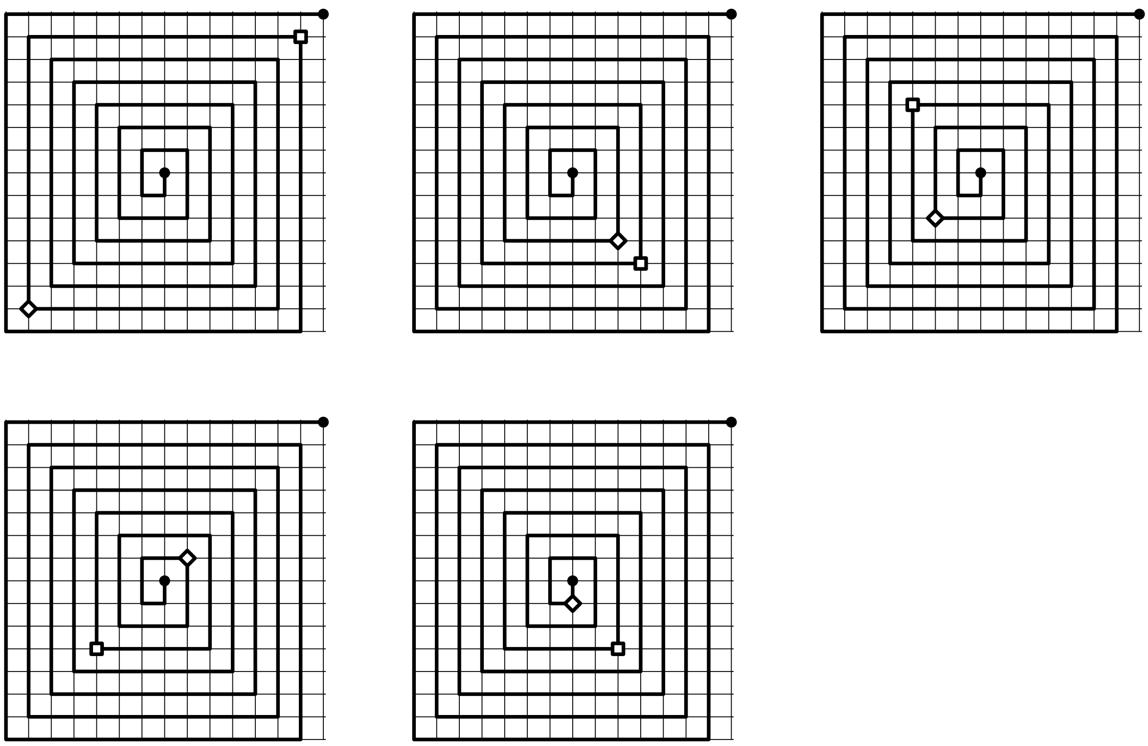
Možné řešení. Ze zadání vidíme, že délky jednotlivých úseků bludiště jsou postupně (počítáno v metrech od středu): 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, atd. Nejdřív určíme, jak dlouhé jsou poslední úseky bludiště, aby celková délka byla právě 210 m. Ať už zkoušením, nebo nějakým pomocným výpočtem, celkem rychle zjistíme, že bludiště sestává z následujících úseků:

$$1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 6,\ 6,\ 7,\ 7,\ 8,\ 8,\ 9,\ 9,\ 10,\ 10,\ 11,\ 11,\ 12,\ 12,\ 13,\ 13,\ 14,\ 14.$$

Anička ušla o 24 m více než Hanka; v uvedené posloupnosti proto hledáme několik po sobě jdoucích čísel, jejichž součet je 24. Aby bylo zřejmé, že jsme neopomněli žádnou možnost, budeme postupovat systematicky podle počtu úseků, které dělí Aničku od Hanky. Pro daný počet úseků můžeme orientačně vyjádřit průměrnou délku jednoho úseku. Poblíž této hodnoty pak v naší posloupnosti hledáme odpovídající počet po sobě jdoucích čísel se součtem 24. Výsledek našeho snažení shrnuje následující tabulka:

počet úseků	průměrná délka	řešení
1	24	–
2	12	12, 12
3	8	–
4	6	5, 6, 6, 7
5	4,8	4, 4, 5, 5, 6
6	4	3, 3, 4, 4, 5, 5
7	3,4	–
8	3	1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5

Poslední řešení v tabulce představuje případ, kdy Hanka ušla pouze 1 metr, tedy nejmenší možnou vzdálenost. Proto nemá smysl uvažovat 9 a více úseků. Úloha má pět řešení; děvčata mohla stát v následujících rozích:



I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Na tabuli bylo napsáno trojmístné přirozené číslo. Připsali jsme k němu všechna další trojmístná čísla, která lze získat změnou pořadí jeho číslic. Na tabuli pak byla kromě čísla původního tři nová. Součet nejmenších dvou ze všech čtyř čísel je 1 088. Jaké číslice obsahuje původní číslo? (*L. Hozová*)

Nápověda. Zjistěte, zda původní číslo obsahuje nulu a zda se v něm opakují číslice.

Možné řešení. Označme použité číslice a, b, c. Ze zadání je patrné, že číslice se v trojmístném čísle neopakují, tj. a, b a c jsou navzájem různé. Kdyby totiž některé dvě číslice byly stejné, pak změnou jejich pořadí lze celkem dostat nejvýše tři různá čísla: pokud by např. $a = b \neq c$ a všechny číslice byly nenulové, pak zmiňovaná čísla jsou

$$aac,\ aca,\ caa.$$

Podobně můžeme usoudit, že mezi použitými číslicemi musí být 0. Kdyby totiž a, b a c byly navzájem různé a nenulové číslice, pak změnou jejich pořadí bychom dostali právě šest různých čísel:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Použité číslice jsou tedy navzájem různé a obsahují nulu; bez jakékoli újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a = 0$ a $b < c$. Změnou pořadí takových číslic dostaneme právě následující čtyři čísla (píšeme uspořádána od nejmenšího):

$$b0c,\ bc0,\ c0b,\ cb0.$$

Zbytek úlohy řešíme jako algebrogram:

$$\begin{array}{cccc} & b & 0 & c \\ & b & c & 0 \\ \hline 1 & 0 & 8 & 8 \end{array}$$

Ze součtu jednotek $c + 0 = 8$ plyne, že $c = 8$ (ve sloupci desítek souhlasí $0 + c = 8$). Ze součtu stovek $b + b = 10$ plyne, že $b = 5$. Původní trojmístné číslo musí obsahovat číslice 0, 5 a 8.

Z9–I–2

Trojúhelník má dvě strany, jejichž délky se liší o 12 cm, a dvě strany, jejichž délky se liší o 15 cm. Obvod tohoto trojúhelníku je 75 cm. Určete délky jeho stran. Najděte všechny možnosti. (*L. Šimůnek*)

Nápověda. Délku jedné strany označte jako neznámou a pomocí ní pak vyjádřete délky ostatních stran. Uvědomte si, kolik možností potřebujete diskutovat.

Možné řešení. Délky dvou stran, které se liší o 12 cm, označíme s a $s + 12$. Třetí strana se od některé z těchto dvou liší o 15 cm. Není zadáno, od které z nich a zda je o 15 cm větší nebo menší; proto musíme diskutovat následující čtyři možnosti:

	délky stran trojúhelníku		
1. možnost	s	$s + 12$	$s + 15$
2. možnost	s	$s + 12$	$s - 15$
3. možnost	s	$s + 12$	$s + 12 + 15$
4. možnost	s	$s + 12$	$s + 12 - 15$

Obvod trojúhelníku má být 75 cm. Odtud pro každou možnost sestavíme rovnici a z ní vypočítáme příslušné s. Na ukázku uvádíme pouze výpočet odpovídající 1. možnosti:

$$\begin{aligned} s + (s + 12) + (s + 15) &= 75, \\ 3s + 27 &= 75, \\ 3s &= 48, \\ s &= 16. \end{aligned}$$

Výsledná s poté dosadíme do tabulky:

	délky stran trojúhelníku		
1. možnost	16	28	31
2. možnost	26	38	11
3. možnost	12	24	39
4. možnost	22	34	19

Aby vypočítané hodnoty skutečně odpovídaly stranám nějakého trojúhelníku, musí platit trojúhelníková nerovnost. Proto ještě zkontrolujeme, zda největší číslo na každém řádku je menší než součet ostatních dvou. Tato nerovnost platí pouze u 1. a 4. možnosti. Úloha má tedy dvě řešení: délky stran trojúhelníku mohou být 16 cm, 28 cm a 31 cm, nebo 19 cm, 22 cm a 34 cm.

Z9–I–3

U horské chaty nám trenér řekl: „Půjdeme-li dál tímto pohodlným tempem 4 km za hodinu, přijdeme na nádraží 45 minut po odjezdu našeho vlaku.“

Pak ukázal na skupinu, která nás právě míjela: „Ti využívají holí, a tak dosahují průměrné rychlosti 6 km za hodinu. Na nádraží budou již půl hodiny před odjezdem našeho vlaku.“

Jak bylo nádraží daleko od horské chaty? (*M. Volfová*)

Nápověda. Připomeňte si vztahy mezi průměrnou rychlostí, celkovou vzdáleností a potřebným časem.

Možné řešení. Dobu od okamžiku, kdy nás trenér motivoval u horské chaty, do odjezdu vlaku označme t (v hodinách). Délku trasy od chaty na nádraží označme s (v km).

Při pohodlném tempu bychom šli $\frac{s}{4}$ hodin a přišli bychom tři čtvrtě hodiny po odjezdu vlaku; platí tedy

$$\frac{s}{4} = t + \frac{3}{4}.$$

Chůze s holemi trvá $\frac{s}{6}$ hodin, což je o půl hodiny méně než t; platí tedy

$$\frac{s}{6} = t - \frac{1}{2}.$$

Z obou rovnic vyjádříme t:

$$t = \frac{s}{4} - \frac{3}{4}, \quad t = \frac{s}{6} + \frac{1}{2},$$

a tak dostaneme novou rovnici:

$$\frac{s}{4} - \frac{3}{4} = \frac{s}{6} + \frac{1}{2}.$$

Jejími úpravami získáme délku trasy s:

$$3s - 9 = 2s + 6,$$
$$s = 15.$$

Trasa od chaty na nádraží byla 15 km dlouhá.

Poznámka. K výsledku lze dospět i následovně. Z prvních dvou výše sestavených rovnic vyjádříme s:

$$s = 4t + 3, \quad s = 6t - 3,$$

a tak dostaneme novou rovnici

$$4t + 3 = 6t - 3,$$

odkud snadno vyjádříme $t = 3$. Zpětným dosazením obdržíme

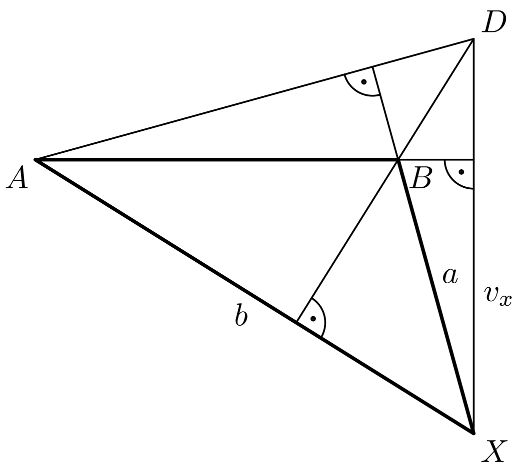
$$s = 12 + 3 = 18 - 3 = 15.$$

Z9–I–4

Pravidelný osmiúhelník $ABCDEFGH$ je vepsán kružnici o poloměru 5 cm. Sestrojte trojúhelník ABX tak, aby bod D byl ortocentrem (průsečíkem výšek) trojúhelníku ABX. (*M. Mach*)

Nápověda. Pro začátek nepracujte s osmiúhelníkem: zkonstruujte ortocentrum D v obecném trojúhelníku ABX a snažte se zrekonstruovat X, znáte-li A, B a D.

Možné řešení. Abychom si uvědomili souvislosti, uvažujeme nejprve obecný trojúhelník ABX a sestrojíme jeho ortocentrum D. Na obrázku je naznačeno řešení pro tupoúhlý trojúhelník, v tomto případě leží ortocentrum vně trojúhelníku. (Všimněte si, že u ostroúhlého trojúhelníku by ortocentrum bylo uvnitř a u pravoúhlého by splývalo s vrcholem, u něhož je pravý úhel.)



Nyní rozebereme, jak sestrojit trojúhelník ABX, je-li dána jeho strana AB a ortocentrum D. Z úvodní diskuse víme, že pokud D leží na přímce AB, pak $D = A$ nebo $D = B$ a vrchol X v tomto případě nelze určit jednoznačně. Proto předpokládáme, že body A, B a D jsou v obecné poloze, tj. neleží na jedné přímce.

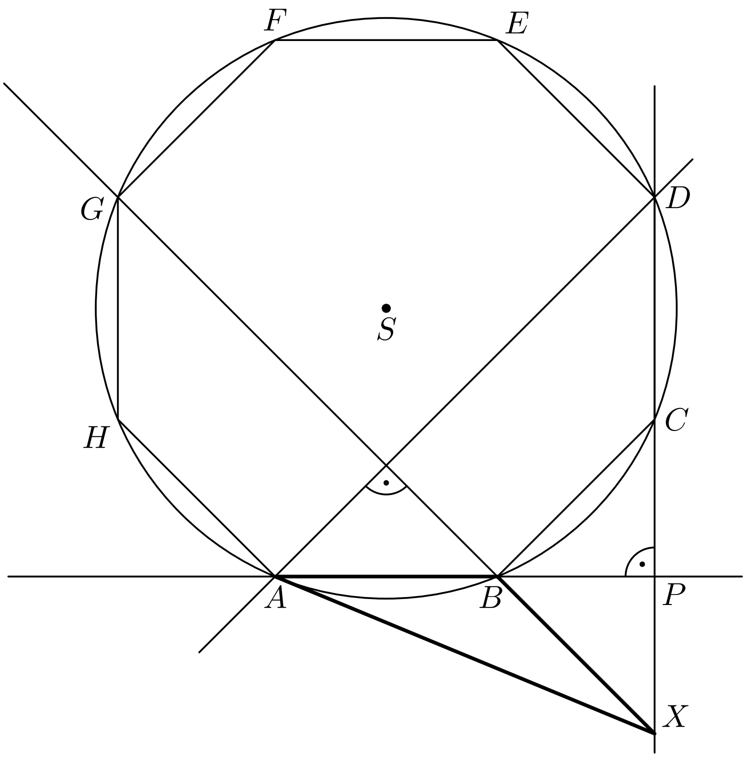
Vrchol X je společným bodem přímek obsahujících strany a, b a výšku v_x; pokud sestrojíme aspoň dvě z těchto tří přímek, bude X dán jako jejich průsečík. Výška v_x leží na přímce, která je kolmá k AB a prochází bodem D. Zbylé dvě výšky v budoucím trojúhelníku leží na přímkách AD, příp. BD. Přímka určená stranou a je kolmá k AD a prochází bodem B (podobně strana b je kolmá k BD a prochází A). Odtud plyne následující možná konstrukce trojúhelníku ABX, je-li dána jeho strana AB a ortocentrum D:

1. sestrojit přímku, která je kolmá k AB a prochází bodem D,
2. sestrojit přímku, která je kolmá k AD a prochází bodem B,
3. označit X průsečík přímek z předchozích dvou kroků,
4. narýsovat trojúhelník ABX.

(Místo 1. nebo 2. kroku konstrukce lze též uvažovat přímku, která je kolmá k BD a prochází bodem A.)

Nyní rozebereme, jak vypadá předchozí konstrukce bodu X pro trojici A, B a D v takové speciální poloze, jež je popsána v zadání pomocí pravidelného osmiúhelníku.

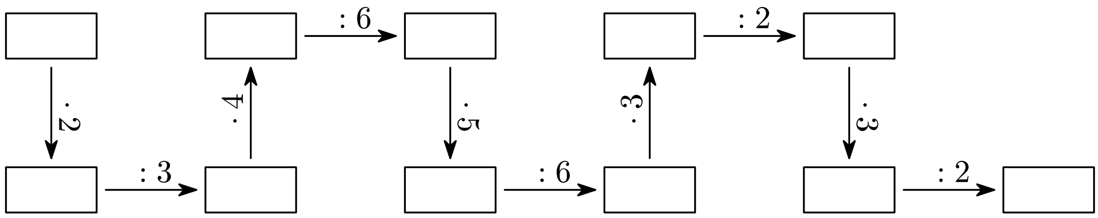
1. Kolmice k přímce AB jdoucí bodem D je právě přímka CD. (Označme P průsečík přímek AB a CD. V trojúhelníku BCP mají vnitřní úhly u vrcholů B a C velikost $45°$, neboť jde o vnější úhly pravidelného osmiúhelníku. Úhel u vrcholu P je proto pravý.)
2. Kolmice k přímce AD jdoucí bodem B je právě přímka BG. (Podobně jako výše můžeme ukázat, že přímky AH a BC jsou kolmé. Úhlopříčka BG je rovnoběžná s AH, podobně AD je rovnoběžná s BC, tudíž přímky AD a BG jsou také kolmé.)
3. Bod X je průsečíkem přímek CD a BG.
4. Výsledný trojúhelník je zvýrazněn v následujícím obrázku.



Poznámka. Všimněte si, že výše popsaná konstrukce je právě konstrukce ortocentra trojúhelníku ABD. Platí tedy, že je-li bod D ortocentrem (obecného) trojúhelníku ABX, pak bod X je ortocentrem trojúhelníku ABD. (Podobně bod B je ortocentrem trojúhelníku ADX a bod A je ortocentrem trojúhelníku BDX.)

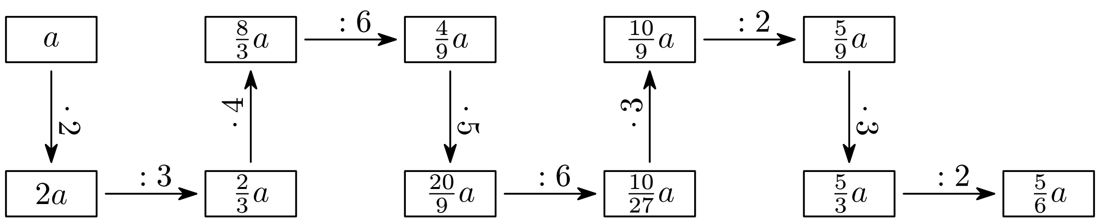
Z9–I–5

Do každého pole níže zobrazeného schématu máme zapsat čtyřmístné přirozené číslo tak, aby všechny naznačené početní operace byly správné. Kolika různými způsoby lze schéma vyplnit? (*L. Šimůnek*)



Nápověda. Číslo v některém poli označte jako neznámou a pomocí ní vyplňte celé schéma.

Možné řešení. Číslo v prvním poli označíme neznámou a a pomocí ní vyjádříme čísla ve všech ostatních polích (zlomky uvádíme v základním tvaru):



Aby všechny zapsané výrazy představovaly celá čísla, musí být neznámá a dělitelná všemi uvedenými jmenovateli. Nejmenším společným násobkem jmenovatelů 3, 9, 27 a 6 je číslo 54. Neznámá a tak musí být násobkem čísla 54.

Dále zohledníme podmínku, že všechna zapsaná čísla mají být čtyřmístná. Nejmenším zapsaným číslem je $\frac{10}{27}a$ a největším je $\frac{8}{3}a$. Proto musí platit:

- $\frac{10}{27}a \geqq 1\,000$, po úpravě $a \geqq 2\,700$,
- $\frac{8}{3}a \leqq 9\,999$, po úpravě $a \leqq 3\,749\frac{5}{8}$.

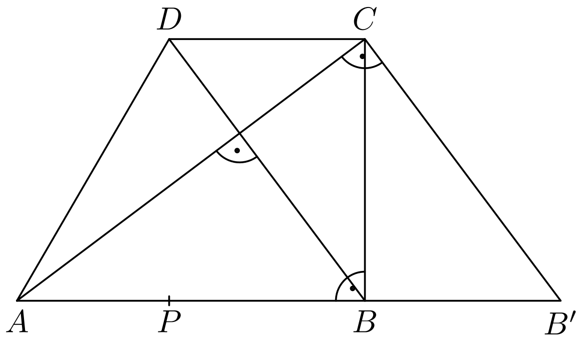
Určíme počet násobků čísla 54 v intervalu od 2 700 do 3 749. Nejmenším z nich je hned 2 700 a dále jich je ještě 19, protože $(3\,749 - 2\,700) : 54 = 19$ (zbytek 23). Do prvního pole lze tudíž doplnit celkem 20 různých čísel, neboli schéma lze vyplnit 20 způsoby.

Z9–I–6

Je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s pravým úhlem u vrcholu B a s rovnoběžnými stranami AB a CD. Úhlopříčky lichoběžníku jsou na sebe kolmé a mají délky $|AC| = 12\,\mathrm{cm}$, $|BD| = 9\,\mathrm{cm}$. Vypočítejte obvod a obsah tohoto lichoběžníku. (*M. Krejčová*)

Nápověda. Obsah tohoto lichoběžníku je stejný jako obsah vhodného pravoúhlého trojúhelníku. Nejprve najděte takový trojúhelník, poté určete délky stran lichoběžníku a jeho obvod.

Možné řešení. Bodem C vedeme rovnoběžku s úhlopříčkou BD a její průsečík s přímkou AB označíme B', viz obrázek. Protože přímky AB a CD jsou také rovnoběžné, je $BB'CD$ kosodélník a platí $|B'C| = |BD| = 9\,\mathrm{cm}$ a $|B'B| = |CD|$.



Smysl této konstrukce spočívá v pozorování, že trojúhelníky ACD a $CB'B$ mají stejný obsah (strany CD a $B'B$ jsou shodné a výšky obou trojúhelníků na tyto strany jsou stejné). Proto je obsah lichoběžníku $ABCD$ stejný jako obsah trojúhelníku $AB'C$ a tento umíme snadno určit: Z konstrukce plyne, že trojúhelník $AB'C$ je pravoúhlý, a ze zadání známe obě jeho odvěsny $|AC| = 12\,\text{cm}$ a $|B'C| = 9\,\text{cm}$. Obsah trojúhelníku $AB'C$, tedy i zadaného lichoběžníku, je roven

$$S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54\,(\text{cm}^2).$$

Abychom určili obvod lichoběžníku, potřebujeme znát délky všech jeho stran.

a) Strana BC je výškou na stranu AB' v právě zmiňovaném trojúhelníku. Z Pythagorovy věty spočítáme délku přepony v trojúhelníku $AB'C$:

$$|AB'| = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15\,(\text{cm}).$$

Ze znalosti obsahu tohoto trojúhelníku určíme jeho výšku $|BC|$:

$$\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot |BC| = 54,$$
$$|BC| = 7{,}2\,(\text{cm}).$$

b) V pravoúhlém trojúhelníku ABC známe jeho přeponu a nyní také jednu odvěsnu; pomocí Pythagorovy věty určíme délku druhé odvěsny:

$$|AB| = \sqrt{12^2 - 7{,}2^2} = 9{,}6\,(\text{cm}).$$

c) Zřejmě platí $|AB'| = |AB| + |BB'|$ a $|BB'| = |CD|$, odkud snadno vyjádříme délku strany CD:

$$|CD| = |AB'| - |AB| = 15 - 9{,}6 = 5{,}4\,(\text{cm}).$$

d) Stranu AD můžeme vidět jako přeponu v pravoúhlém trojúhelníku APD, kde P je pata kolmice z bodu D na stranu AB. Délky odvěsen v tomto trojúhelníku jsou $|PD| = |BC| = 7{,}2\,\text{cm}$ a $|AP| = |AB| - |CD| = 9{,}6 - 5{,}4 = 4{,}2\,(\text{cm})$. Podle Pythagorovy věty spočítáme i délku přepony:

$$|AD| = \sqrt{7{,}2^2 + 4{,}2^2} \doteq 8{,}3\,(\text{cm}).$$

Obvod zadaného lichoběžníku je tedy přibližně roven

$$o = |AB| + |BC| + |CD| + |DA| \doteq 9{,}6 + 7{,}2 + 5{,}4 + 8{,}3 = 30{,}5\,(\mathrm{cm}).$$

Poznámka. Pro zajímavost a kontrolu uvádíme ještě výpočet obsahu lichoběžníku pomocí obvyklého vzorce:

$$S = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|) \cdot |BC| = \frac{1}{2}(9{,}6 + 5{,}4) \cdot 7{,}2 = 54\,(\mathrm{cm}^2).$$

Všimněte si, že úvahy v úvodu našeho řešení platnost tohoto vzorce vlastně zdůvodňují.

Vztah pro výpočet obsahu zadaného lichoběžníku lze odvodit také pomocí následujícího obrázku. Na něm je čárkovaně znázorněn obdélník, jehož každá strana prochází některým vrcholem lichoběžníku a je rovnoběžná s některou jeho úhlopříčkou. Obsah obdélníku je roven součinu $|AC| \cdot |BD|$. Obsah lichoběžníku je evidentně poloviční, tedy $S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD|$.