I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Maminka zaplatila v knihkupectví 2 700 Kč. Platila dvěma druhy bankovek, dvousetkorunovými a pětisetkorunovými, a přesně. Kolik kterých bankovek mohla použít? Uveďte všechny možnosti. (*M. Krejčová*)

Nápověda. Kolik pětisetkorunových bankovek lze použít, aby bylo možné doplatit zbytek dvousetkorunovými?

Možné řešení. Je zřejmé, že pětisetkorunových bankovek musela maminka použít méně než 6, protože $6 \cdot 500 = 3\,000$ (Kč). Probereme postupně všechny možnosti, tj. že použila pět, čtyři, atd. až žádnou pětisetkorunovou bankovku. Poté zjistíme, kolik korun by takto zaplatila a kolik by jí ještě zbývalo doplatit. Nakonec rozhodneme, zda by zbylou částku mohla doplatit pouze dvousetkorunovými bankovkami. Celou diskusi vyjádříme tabulkou:

počet 500Kč bankovek	5	4	3	2	1	0
zaplaceno	2 500	2 000	1 500	1 000	500	0
zbývá doplatit	200	700	1 200	1 700	2 200	2 700
počet 200Kč bankovek	1	—	6	—	11	—

Maminka mohla zaplatit třemi způsoby:

- 5 pětisetkorunových a 1 dvousetkorunová bankovka,
- 3 pětisetkorunové a 6 dvousetkorunových bankovek,
- 1 pětisetkorunová a 11 dvousetkorunových bankovek.

Poznámka. Podobně lze postupovat vzhledem k dvousetkorunovým bankovkám, kterých musí být méně než 14 ($14 \cdot 200 = 2\,800$); odpovídající tabulka bude v tomto případě podstatně delší.

Z5–I–2

Pat napsal na tabuli podivný příklad:

$$550 + 460 + 359 + 340 = 2\,012.$$

Mat to chtěl napravit, proto pátral po neznámém čísle, které by připočetl ke každému z pěti uvedených čísel, aby pak byl příklad početně správný. Jaké to bylo číslo? (*L. Hozová*)

Nápověda. Kolik čísel přičte Mat k levé a kolik k pravé straně rovnosti?

Možné řešení. Součet čtyř čísel na levé straně rovnosti je $550 + 460 + 359 + 340 = 1\,709$; to je o $2\,012 - 1\,709 = 303$ menší číslo než na pravé straně rovnosti. K levé straně přičteme

Matovo číslo celkem čtyřikrát, k pravé pouze jednou. Rozdíl 303 mezi oběma stranami musí tedy být vyrovnán třemi Matovými čísly. Hledané číslo je proto $303 : 3 = 101$.

Poznámka. Pro lepší názornost ještě uvádíme kontrolu předchozího výsledku: Po přičtení na levé straně dostáváme

$$(550 + 101) + (460 + 101) + (359 + 101) + (340 + 101) = 651 + 561 + 460 + 441 = 2\,113,$$

na pravé straně vychází

$$2\,012 + 101 = 2\,113.$$

Vidíme, že číslo 101 vyhovuje požadavkům. Současně se zde nabízí vhodné znázornění na rovnoramenných vahách.

Z5–I–3

Ruda dostal k narozeninám budík. Měl z něj radost a seřídil si jej podle přesného času. Od té doby každé ráno, když vstával (sobotu, neděli a prázdniny nevyjímaje), zmáčkl přesně na 4 sekundy tlačítko, kterým se osvětluje ciferník. Přitom si všiml, že po dobu stisknutí tlačítka je čas na budíku zastaven. Jinak se ale budík vůbec nezpožďuje ani nezrychluje. Odpoledne 11. prosince se Ruda podíval na svůj budík a zjistil, že ukazuje přesně o 3 minuty méně, než by měl.

Kdy dostal Ruda tento budík? (*M. Petrová*)

Nápověda. Kolikrát zmáčkl Ruda tlačítko?

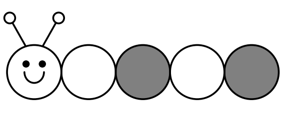
Možné řešení. Nejprve zjistíme, kolikrát zmáčkl Ruda tlačítko, kterým se osvětluje ciferník: Tlačítko držel pokaždé 4 sekundy a celkové zpoždění budíku nakonec bylo 3 minuty, tj. 180 sekund. Ruda tedy zmáčkl tlačítko celkem 45krát ($180 : 4 = 45$).

Každý den zmáčkl tlačítko ráno po probuzení. Nyní zjistíme, který den ho stiskl poprvé, a to tak, že zpětně odpočítáme 45 dní od 11. prosince: V prosinci (od 11. do 1.) to je 11 dní, listopad (od 30. do 1.) má 30 dní, což je celkem 41 dní. Potřebujeme odpočítat ještě 4 dny v říjnu: 31., 30., 29., 28.

Ruda zmáčkl osvětlovací tlačítko poprvé 28. října. Budík dostal o den dříve, tzn. 27. října.

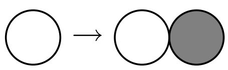
Z5–I–4

Červík se skládá z bílé hlavy a několika článků, viz obrázek.

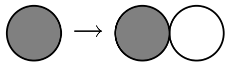


Když se červík narodí, má hlavu a jeden bílý článek. Každý den přibude červíkovi nový článek jedním z následujících způsobů:

- buď se některý bílý článek rozdělí na bílý a šedý:



- nebo se některý šedý článek rozdělí na šedý a bílý:

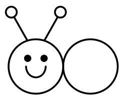


(V obou případech popisujeme situaci při pohledu na červíka od hlavy.) Čtvrtého dne červík dospívá a dále neroste — jeho tělo se skládá z hlavy a čtyř článků.

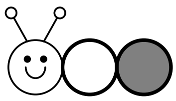
Kolik nejvíce různých barevných variant dospělých červíků tohoto druhu může existovat? (*E. Novotná*)

Nápověda. Jak může vypadat červík starý dva dny?

Možné řešení. První den svého života má červík jenom jeden bílý článek (a hlavu):

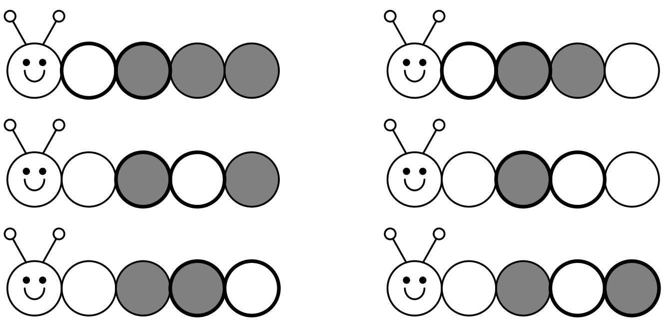


Druhý den mu proto může dorůst nový článek pouze prvním z uvedených způsobů; všichni červíci staří dva dny tedy vypadají stejně:



Třetího dne se může rozdělit buď první (bílý) nebo druhý (šedý) článek, jsou tedy dvě možnosti:

Čtvrtého dne se může u obou typů červíků z předchozího dne rozdělit kterýkoli z jeho tří článků, musíme tedy prověřit celkem 6 možností:



Porovnáním všech šesti dospělých červíků zjišťujeme, že mezi nimi jsou dvě dvojice stejných červíků, zbylí dva jsou odlišní od všech ostatních. Existují tedy právě čtyři různé barevné varianty dospělých červíků tohoto zajímavého druhu.

Z5–I–5

Vypočtěte $3 \cdot 15 + 20 : 4 + 1$.

Pak doplňte závorky do zadání tak, aby výsledek byl:

1. co největší celé číslo,
2. co nejmenší celé číslo.

(*M. Volfová*)

Nápověda. Zjistěte, kde všude mohou být umístěny závorky.

Možné řešení. Zadaný příklad bez jakýchkoli závorek vychází:

$$3 \cdot 15 + 20 : 4 + 1 = 45 + 5 + 1 = 51.$$

Nyní budeme umisťovat závorky a průběžně porovnávat výsledky. Snažíme se vyčerpat všechny možnosti, přitom budeme ignorovat závorky, které jsou zbytečné, např.

$$[3 \cdot (15 + 20)] : 4 + 1 = 3 \cdot (15 + 20) : 4 + 1$$

apod. Nejprve uvádíme možnosti s jednou závorkou, následně se dvěma. Umístit smysluplně tři a více závorek už nelze.

$(3 \cdot 15 + 20) : 4 + 1 = (45 + 20) : 4 + 1 = 65 : 4 + 1$ nelze dělit beze zbytku

$3 \cdot (15 + 20) : 4 + 1 = 3 \cdot 35 : 4 + 1 = 105 : 4 + 1$ nelze dělit beze zbytku

$3 \cdot (15 + 20 : 4) + 1 = 3 \cdot (15 + 5) + 1 = 3 \cdot 20 + 1 = 61$

$3 \cdot (15 + 20 : 4 + 1) = 3 \cdot (15 + 5 + 1) = 3 \cdot 21 = 63$

$3 \cdot 15 + 20 : (4 + 1) = 45 + 20 : 5 = 45 + 4 = 49$

$3 \cdot [(15 + 20) : 4 + 1] = 3 \cdot [35 : 4 + 1]$ nelze dělit beze zbytku

$3 \cdot [15 + 20 : (4 + 1)] = 3 \cdot [15 + 4] = 3 \cdot 19 = 57$

$(3 \cdot 15 + 20) : (4 + 1) = (45 + 20) : 5 = 65 : 5 = 13$

$3 \cdot (15 + 20) : (4 + 1) = 3 \cdot 35 : 5 = 105 : 5 = 21$

Největší číslo jsme získali takto:

$$3 \cdot (15 + 20 : 4 + 1) = 63,$$

nejmenší číslo jsme získali následovně:

$$(3 \cdot 15 + 20) : (4 + 1) = 13.$$

Poznámka. Děti budou zřejmě umisťovat závorky zkoušením. Nemusejí přitom ověřit všechny možnosti; je pravděpodobné, že budou vynechávat ty, kde nelze dělit beze zbytku, a že např. při hledání největšího čísla vynechají některé případy s tím, že „výsledek by byl moc malý“. Takové postupy uznávejte.

Za správné uznávejte i zdůvodnění, že k získání co největšího celého čísla chceme co nejmenšího dělitele a současně co největší výraz, který násobíme třemi; pro co nejmenší celé číslo uvažujeme opačně.

Pokud žáka napadne umístit začátek či konec závorky doprostřed dvojmístného čísla, může získat nejmenší číslo takto:

$$(3 \cdot 15 + 2)0 : (4 + 1) = 47 \cdot 0 : 5 = 0.$$

I takové řešení uznávejte.

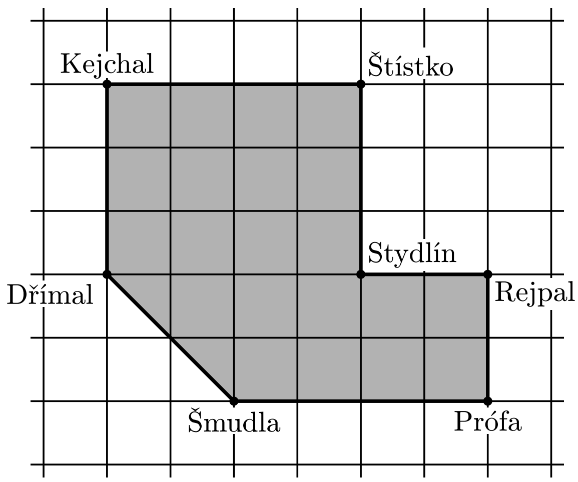
Z5–I–6

Sedm trpaslíků se postavilo po obvodu své zahrádky, do každého rohu jeden, a napnuli mezi sebou provaz kolem celé zahrady. Sněhurka vyšla od Šmudly a chodila podél provazu. Nejprve šla čtyři metry na východ, kde potkala Prófu. Od něj pokračovala dva metry na sever, než dorazila k Rejpalovi. Od Rejpala šla na západ a po dvou metrech natrefila na Stydlína. Dál pokračovala tři metry na sever, až došla ke Štístkovi. Vydala se na západ a po čtyřech metrech potkala Kejchala, odkud jí zbývaly tři metry na jih ke Dřímalovi. Nakonec podle provázku došla nejkratší cestou ke Šmudlovi a tím obešla celou zahradu.

Kolik metrů čtverečních má celá zahrada? (*M. Mach*)

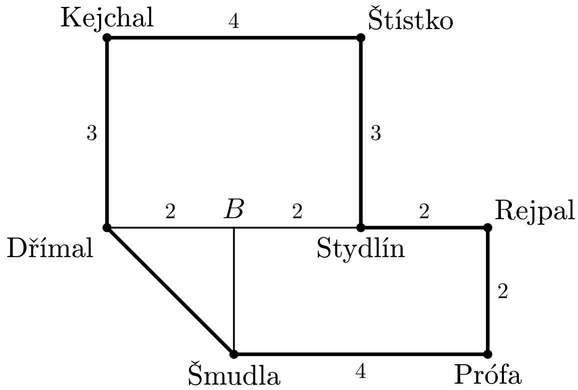
Nápověda. Zakreslete si tvar zahrady, nejlépe na čtverečkovaný papír.

Možné řešení. Nakreslíme si celou zahradu do čtvercové sítě, ve které jeden čtvereček představuje jeden metr čtvereční.



Nyní snadno určíme plochu obrazce. Nejdříve spočítáme všechny celé čtverečky — těch je ve vyznačené ploše 21. Ještě zbývá připočítat dva trojúhelníčky, které dohromady tvoří jeden další celý čtvereček. Napočítali jsme 22 čtverečků, zahrada má tedy $22\,\mathrm{m}^2$.

Jiné řešení. Pokud nemáme k dispozici čtverečkovaný papír, můžeme nákres zahrady rozdělit jako na následujícím obrázku; společný bod pomocných úseček označíme B a podle zadání doplníme velikosti potřebných stran (vše v metrech).



Odtud snadno určíme obsahy jednotlivých částí:

- Obdélník „Stydlín—Štístko—Kejchal—Dřímal“ má obsah $3 \cdot 4 = 12\,(\mathrm{m}^2)$.
- Obdélník „Šmudla—Prófa—Rejpal—B“ má obsah $4 \cdot 2 = 8\,(\mathrm{m}^2)$.
- Trojúhelník „Šmudla—Dřímal—B“ můžeme vidět jako polovinu čtverce o straně $2\,\mathrm{m}$ rozděleného úhlopříčkou; jeho obsah je tedy poloviční vzhledem k původnímu čtverci, tj. $(2 \cdot 2) : 2 = 2\,(\mathrm{m}^2)$.

Zahrádka trpaslíků má obsah $12 + 8 + 2 = 22\,(\mathrm{m}^2)$.