I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Součin tří přirozených čísel je 600. Kdybychom jednoho činitele zmenšili o 10, zmenšil by se součin o 400. Kdybychom místo toho jednoho činitele zvětšili o 5, zvětšil by se součin na dvojnásobek původní hodnoty. Která tři přirozená čísla mají tuto vlastnost?

(*L. Hozová*)

Nápověda. Z každé oznamovací věty v zadání lze přímo určit jednoho činitele.

Možné řešení. Pracujme nejprve s druhou větou: zmenšením jednoho činitele o 10 se zmenší součin o 400. Přitom 400 jsou dvě třetiny z 600, tedy 10 musejí být dvě třetiny ze zmíněného činitele. Tím je proto číslo 15.

Dále pracujme s třetí větou: zvětšením jednoho činitele o 5 se zvětší součin na dvojnásobek. Zvětšením o 5 se tedy tento činitel zvětší také na dvojnásobek. Činitel je proto 5.

Z první věty zadání víme, že součin všech činitelů je 600, dva z nich uvádíme výše, třetí je $600 : 15 : 5 = 8$.

Informacím ze zadání vyhovují čísla 5, 8 a 15.

Jiná nápověda. Zadání vede ke třem rovnicím o třech neznámých.

Jiné řešení. Protože ze zadání není jasné, zda zmenšujeme/zvětšujeme jednoho a téhož činitele nebo pokaždé jiného, musíme probrat obě možnosti. V každém případě si hledaná přirozená čísla označíme x, y a z.

1. Předpokládejme, že se v zadání mluví o dvou různých činitelích. V takovém případě můžeme informace ze zadání přepsat následovně:

$$\begin{aligned} xyz &= 600,\\ (x-10)yz &= 200,\\ x(y+5)z &= 1\,200. \end{aligned}$$

Druhá rovnost po roznásobení je $xyz - 10yz = 200$. Jelikož $xyz = 600$, po úpravě dostáváme $10yz = 400$, tj. $yz = 40$. Z rovnosti $xyz = 600$ nyní plyne $x \cdot 40 = 600$, tj.

$$x = 15.$$

Podobně, třetí rovnost po roznásobení je $xyz + 5xz = 1\,200$. Jelikož $xyz = 600$, po úpravě dostáváme $5xz = 600$, tj. $xz = 120$. Protože již známe $x = 15$, musí být

$$z = 8.$$

Dosazením opět do rovnosti $xyz = 600$ máme $120y = 600$, odkud plyne

$$y = 5.$$

2. Předpokládejme, že se v zadání mluví dvakrát o stejném činiteli. V takovém případě můžeme psát:

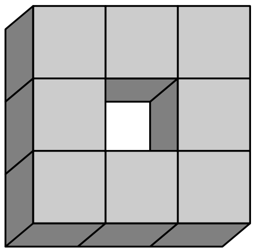
$$xyz = 600,$$
$$(x - 10)yz = 200,$$
$$(x + 5)yz = 1\,200.$$

Stejně jako výše roznásobíme druhou, resp. třetí rovnost, dosadíme $xyz = 600$ a po úpravě obdržíme $10yz = 400$, tj. $yz = 40$, resp. $5yz = 600$, tj. $yz = 120$. Jelikož $40 \neq 120$, vidíme, že výchozí předpoklad nemůže být splněn.

V zadání se mluví o dvou různých činitelích; uvažovanou vlastnost mají právě tato tři přirozená čísla: 5, 8 a 15.

Z8–I–2

Standa si složil 7 shodných útvarů, každý slepený z 8 stejných šedých krychliček o hraně 1 cm tak jako na obrázku.



Potom všechny ponořil do bílé barvy a následně každý z útvarů rozebral na původních 8 dílů, které tak měly některé stěny šedé a jiné bílé. Přidal k nim ještě 8 nových krychliček, jež byly stejné jako ostatní, akorát celé bílé. Ze všech kostek dohromady poskládal jednu velkou krychli a snažil se přitom, aby co největší část povrchu vzniklé krychle byla šedá. Kolik cm^2 povrchu bude jistě bílých? (*M. Mach*)

Nápověda. Nejdřív zjistěte, kolik kterých krychliček má Standa před vlastním skládáním k dispozici.

Možné řešení. Potřebujeme určit, z jakých krychliček Standa skládal svoji velkou krychli. Rohové krychličky z rozložených obílených útvarů mají jednu dvojici sousedních stěn šedou, zbytek bílý; celkem jich je $7 \cdot 4 = 28$. Ostatní krychličky z těchto útvarů mají jednu dvojici protilehlých stěn šedou, zbytek bílý; celkem jich je také $7 \cdot 4 = 28$. K těmto krychličkám se ještě přidalo 8 celých bílých.

Standa měl k dispozici celkem 64 krychliček, skládal tedy krychli s „hranou 4 kostičky“ ($4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$). Nyní určíme počty krychliček ve velké krychli podle počtu viditelných stěn: Rohové kostičky mají viditelné tři stěny; těch je celkem 8. Na hranách krychle jsou krychličky s dvěma viditelnými stěnami; celkem jich je $12 \cdot 2 = 24$. Ve stěnách krychle jsou krychličky s jednou viditelnou stěnou; celkem jich je $6 \cdot 4 = 24$. Uvnitř krychle je 8 krychliček, které nejsou vidět vůbec.

Z rozřezaných útvarů Standa nezískal žádné krychličky, které by měly 3 šedé stěny. Zřejmě tedy celou šedou krychli sestavit nemohl, přestože celková šedá plocha na krychličkách je větší než povrch velké krychle. My samozřejmě nevíme, jak Standa krychli skládal, nicméně, aby co největší část povrchu byla šedá, mohl postupovat např. takto:

- všech 8 čistě bílých krychliček umístí doprostřed,
- 24 krychliček se sousedními šedými stěnami použije na hrany velké krychle,
- zbylé 4 krychličky se sousedními šedými stěnami umístí do některých vrcholů (tímto dostane na povrch velké krychle 4 bílé plošky),
- 24 krychliček s protilehlými šedými stěnami použije do stěn velké krychle,
- zbylé 4 krychličky s protilehlými šedými stěnami umístí do zbylých vrcholů (na povrchu přibude 8 bílých plošek).

Při tomto postupu by na povrchu velké krychle bylo 12 bílých plošek, tj. $12\,\mathrm{cm}^2$.

Aby bylo zřejmé, že lépe už krychli složit nelze, všimněme si následujících skutečností: Žádnou z krychliček, které mají protilehlé stěny šedé, nikdy nelze ve velké krychli umístit tak, aby obě šedé stěny byly vidět — použitím všech těchto kostiček lze tedy obsáhnout nejvýše $28\,\mathrm{cm}^2$ šedé plochy na povrchu velké krychle. Krychličky, které mají sousední stěny šedé, naopak lze umístit tak, aby obě šedé stěny byly vidět — použitím všech těchto kostiček lze obsáhnout nejvýše $56\,\mathrm{cm}^2$ šedé plochy na povrchu velké krychle. Na povrchu velké krychle může být nejvýše $28 + 56 = 84\,(\mathrm{cm}^2)$ šedé plochy. Povrch celé krychle je $6 \cdot 4 \cdot 4 = 96\,(\mathrm{cm}^2)$; na jejím povrchu tedy nemůže být méně než $96 - 84 = 12\,(\mathrm{cm}^2)$ bílých.

Předchozí postup ukazuje jednu z možností, jak tento výsledek realizovat. Ať už Standa postupoval jakkoli, $12\,\mathrm{cm}^2$ povrchu krychle bude jistě bílých.

Z8–I–3

Děda zapomněl čtyřmístný kód svého mobilu. Věděl jen, že na prvním místě nebyla nula, že uprostřed byly buď dvě čtyřky nebo dvě sedmičky nebo taky čtyřka se sedmičkou (v neznámém pořadí) a že šlo o číslo dělitelné číslem 15. Kolik je možností pro zapomenutý kód? Jaká číslice mohla být na prvním místě? (*M. Volfová*)

Nápověda. Začněte prostředním dvojčíslím, poté uvažujte ostatní podmínky ze zadání.

Možné řešení. Prostřední dvě místa mohou být obsazena právě čtyřmi způsoby:

$$*44*,\ *77*,\ *47*,\ *74*.$$

Číslo je dělitelné 15 právě tehdy, když je dělitelné třemi a zároveň pěti. Přitom číslo je dělitelné pěti právě tehdy, když jeho poslední číslice je buď 0 nebo 5, a číslo je dělitelné třemi právě tehdy, když jeho ciferný součet je dělitelný třemi.

Je-li poslední číslice 0, pak uvažujeme následující možnosti

$$*440,\ *770,\ *470,\ *740$$

a hledáme první číslici tak, aby ciferný součet byl dělitelný třemi. Ve všech případech vychází tatáž možná trojice: 1, 4 nebo 7.

Je-li poslední číslice 5, pak uvažujeme podobně pro následující možnosti

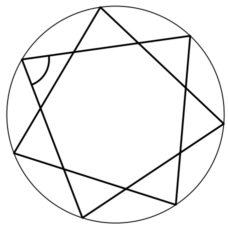
$$*445, *775, *475, *745.$$

Ve všech případech vychází tatáž možná trojice: 2, 5 nebo 8.

Podmínkám ze zadání vyhovuje $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ možností. Na prvním místě může být kterákoli číslice kromě 3, 6 a 9.

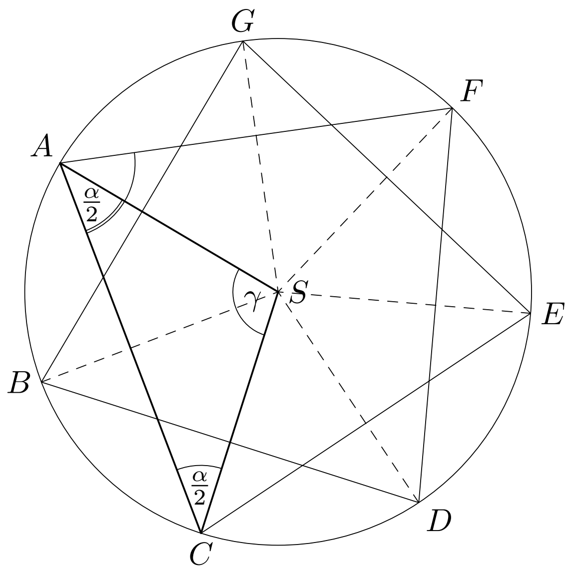
Z8–I–4

Je dána pravidelná sedmicípá hvězda podle obrázku. Jaká je velikost vyznačeného úhlu? (*E. Patáková*)



Nápověda. Hledejte rovnoramenné trojúhelníky, u kterých umíte určit velikosti vnitřních úhlů.

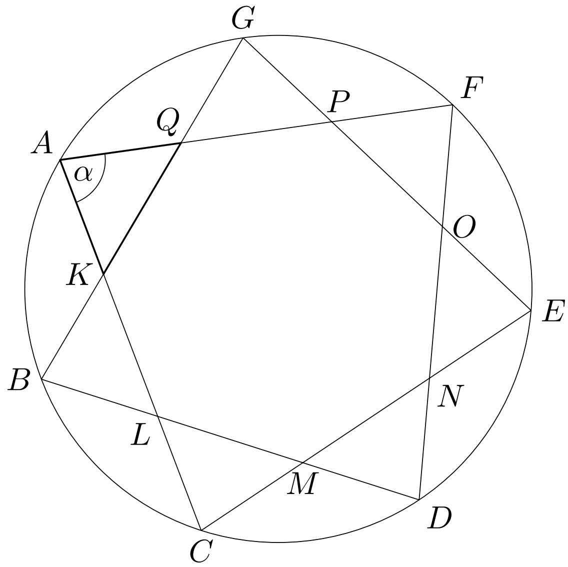
Možné řešení. Hledaný úhel budeme nazývat α. Dále označme vrcholy a střed hvězdy jako na obrázku. Spojíme-li všechny vrcholy se středem S, vidíme spoustu rovnoramenných trojúhelníků, z nichž mnohé jsou navzájem shodné. Např. trojúhelníky ASC, BSD, $\dots$, GSB jsou shodné: všechny tyto trojúhelníky mají shodná ramena a úhel u vrcholu S (jehož velikost je rovna dvojnásobku velikosti úhlu ASB, tj. $\gamma = 2 \cdot \frac{360^\circ}{7}$). Úhel α je proto roven dvojnásobku úhlu u vrcholu A v trojúhelníku ASC. Protože je tento trojúhelník rovnoramenný, je úhel α stejný jako součet vnitřních úhlů u vrcholů A a C.



Součet velikostí vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku je 180°, proto platí $\alpha + \gamma = 180°$, odkud snadno dopočítáme velikost úhlu α:

$$\alpha = 180° - \frac{2}{7} \cdot 360° = \left(1 - \frac{4}{7}\right) \cdot 180° = \left(77\frac{1}{7}\right)^{\circ} \doteq 77°8'34''.$$

Poznámka. Pokud znáte nebo umíte zdůvodnit, že velikost vnitřního úhlu v pravidelném sedmiúhelníku je rovna $\frac{5}{7} \cdot 180°$, pak lze úlohu dořešit následovně.



Vnitřní úhly u vrcholů K a Q v rovnoramenném trojúhelníku KAQ jsou vnějšími úhly pravidelného sedmiúhelníku $KLMNOPQ$; jejich velikost je proto $180° - \frac{5}{7}180° = \frac{2}{7}180°$. Součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku KAQ je $\alpha + \frac{4}{7}180° = 180°$, odkud vyjádříme neznámou: $\alpha = \left(1 - \frac{4}{7}\right) \cdot 180° = \ldots$

Z8–I–5

1. září 2007 byla založena jazyková škola, ve které vyučovalo sedm pedagogů. 1. září 2010 k těmto sedmi učitelům přibyl nový kolega, kterému bylo právě 25 let. Do 1. září 2012 jeden z učitelů ze školy odešel, a tak jich zůstalo opět sedm. Průměrný věk pedagogů na škole byl ve všechna tři zmíněná data stejný.

Kolik let bylo 1. září 2012 učiteli, který ve škole už nepracoval? Jaký byl ten den průměrný věk učitelů na škole? (*L. Šimůnek*)

Nápověda. Pracujte se součtem věků všech zaměstnaných učitelů. Uvažujte, jak se tento součet mění vzhledem ke zmiňovaným datům.

Možné řešení. Součet věků všech sedmi učitelů školy k 1. září 2007 označíme c. Součet věků těchto sedmi lidí se ke dni 1. září 2010 zvětšil o $7 \cdot 3 = 21$, součet věků všech osmi učitelů pracujících v tento den na škole byl tedy

$$c + 21 + 25 = c + 46.$$

Součet věků těchto osmi lidí se ke dni 1. září 2012 zvětšil o $8 \cdot 2 = 16$. V tento den jeden z nich už na škole nepracoval, jeho věk v tu dobu označíme x. Součet věků sedmi zbývajících učitelů byl v tento den roven

$$c + 46 + 16 - x = c + 62 - x.$$

Protože má být průměrný věk učitelů na škole ve všechna zmíněná data stejný, platí rovnosti

$$\frac{c}{7} = \frac{c+46}{8} = \frac{c+62-x}{7}.$$

Z rovnosti mezi prvním a třetím lomeným výrazem přímo plyne, že $x = 62$. Učiteli, který 1. září 2012 už na škole nepracoval, bylo tedy zrovna 62 let.

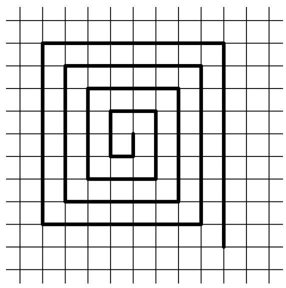
Úpravami rovnosti mezi prvními dvěma lomenými výrazy dojdeme k hodnotě c:

$$\begin{aligned} \frac{c}{7} &= \frac{c+46}{8}, \\ 8c &= 7c + 7 \cdot 46, \\ c &= 322. \end{aligned}$$

Průměrný věk učitelů ve všechna tři zmíněná data byl $322 : 7 = 46$ let.

Z8–I–6

Anička a Hanka chodily v labyrintu po spirálovité cestičce, jejíž začátek je schematicky znázorněn na obrázku. Strana čtverečku ve čtvercové síti má délku 1 m a celá cestička od středu bludiště až k východu je dlouhá 210 m.



Děvčata vyšla ze středu bludiště, nikde se nevracela a po čase každá zastavila v některém z rohů. Anička přitom ušla o 24 m více než Hanka. Ve kterých rozích mohla děvčata stát? Určete všechna řešení. (*E. Novotná*)

Nápověda. Nejdřív určete délky všech úseků bludiště.

Možné řešení. Ze zadání vidíme, že délky jednotlivých úseků bludiště jsou postupně (počítáno v metrech od středu): 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, atd. Nejdřív určíme, jak dlouhé jsou poslední úseky bludiště, aby celková délka byla právě 210 m. Ať už zkoušením, nebo nějakým pomocným výpočtem, celkem rychle zjistíme, že bludiště sestává z následujících úseků:

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 14, 14.$$

Anička ušla o 24 m více než Hanka; v uvedené posloupnosti proto hledáme několik po sobě jdoucích čísel, jejichž součet je 24. Aby bylo zřejmé, že jsme neopomněli žádnou možnost, budeme postupovat systematicky podle počtu úseků, které dělí Aničku od Hanky. Pro daný počet úseků můžeme orientačně vyjádřit průměrnou délku jednoho úseku. Poblíž této hodnoty pak v naší posloupnosti hledáme odpovídající počet po sobě jdoucích čísel se součtem 24. Výsledek našeho snažení shrnuje následující tabulka:

počet úseků	průměrná délka	řešení
1	24	–
2	12	12, 12
3	8	–
4	6	5, 6, 6, 7
5	4,8	4, 4, 5, 5, 6
6	4	3, 3, 4, 4, 5, 5
7	3,4	–
8	3	1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5

Poslední řešení v tabulce představuje případ, kdy Hanka ušla pouze 1 metr, tedy nejmenší možnou vzdálenost. Proto nemá smysl uvažovat 9 a více úseků. Úloha má pět řešení; děvčata mohla stát v následujících rozích: