I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Na tabuli bylo napsáno trojmístné přirozené číslo. Připsali jsme k němu všechna další trojmístná čísla, která lze získat změnou pořadí jeho číslic. Na tabuli pak byla kromě čísla původního tři nová. Součet nejmenších dvou ze všech čtyř čísel je 1 088. Jaké číslice obsahuje původní číslo? (*L. Hozová*)

Nápověda. Zjistěte, zda původní číslo obsahuje nulu a zda se v něm opakují číslice.

Možné řešení. Označme použité číslice a, b, c. Ze zadání je patrné, že číslice se v trojmístném čísle neopakují, tj. a, b a c jsou navzájem různé. Kdyby totiž některé dvě číslice byly stejné, pak změnou jejich pořadí lze celkem dostat nejvýše tři různá čísla: pokud by např. $a = b \neq c$ a všechny číslice byly nenulové, pak zmiňovaná čísla jsou

$$aac,\ aca,\ caa.$$

Podobně můžeme usoudit, že mezi použitými číslicemi musí být 0. Kdyby totiž a, b a c byly navzájem různé a nenulové číslice, pak změnou jejich pořadí bychom dostali právě šest různých čísel:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Použité číslice jsou tedy navzájem různé a obsahují nulu; bez jakékoli újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a = 0$ a $b < c$. Změnou pořadí takových číslic dostaneme právě následující čtyři čísla (píšeme uspořádána od nejmenšího):

$$b0c,\ bc0,\ c0b,\ cb0.$$

Zbytek úlohy řešíme jako algebrogram:

$$\begin{array}{cccc} & b & 0 & c \\ & b & c & 0 \\ \hline 1 & 0 & 8 & 8 \end{array}$$

Ze součtu jednotek $c + 0 = 8$ plyne, že $c = 8$ (ve sloupci desítek souhlasí $0 + c = 8$). Ze součtu stovek $b + b = 10$ plyne, že $b = 5$. Původní trojmístné číslo musí obsahovat číslice 0, 5 a 8.

Z9–I–2

Trojúhelník má dvě strany, jejichž délky se liší o 12 cm, a dvě strany, jejichž délky se liší o 15 cm. Obvod tohoto trojúhelníku je 75 cm. Určete délky jeho stran. Najděte všechny možnosti. (*L. Šimůnek*)

Nápověda. Délku jedné strany označte jako neznámou a pomocí ní pak vyjádřete délky ostatních stran. Uvědomte si, kolik možností potřebujete diskutovat.

Možné řešení. Délky dvou stran, které se liší o 12 cm, označíme s a $s + 12$. Třetí strana se od některé z těchto dvou liší o 15 cm. Není zadáno, od které z nich a zda je o 15 cm větší nebo menší; proto musíme diskutovat následující čtyři možnosti:

	délky stran trojúhelníku		
1. možnost	s	$s + 12$	$s + 15$
2. možnost	s	$s + 12$	$s - 15$
3. možnost	s	$s + 12$	$s + 12 + 15$
4. možnost	s	$s + 12$	$s + 12 - 15$

Obvod trojúhelníku má být 75 cm. Odtud pro každou možnost sestavíme rovnici a z ní vypočítáme příslušné s. Na ukázku uvádíme pouze výpočet odpovídající 1. možnosti:

$$\begin{aligned} s + (s + 12) + (s + 15) &= 75, \\ 3s + 27 &= 75, \\ 3s &= 48, \\ s &= 16. \end{aligned}$$

Výsledná s poté dosadíme do tabulky:

	délky stran trojúhelníku		
1. možnost	16	28	31
2. možnost	26	38	11
3. možnost	12	24	39
4. možnost	22	34	19

Aby vypočítané hodnoty skutečně odpovídaly stranám nějakého trojúhelníku, musí platit trojúhelníková nerovnost. Proto ještě zkontrolujeme, zda největší číslo na každém řádku je menší než součet ostatních dvou. Tato nerovnost platí pouze u 1. a 4. možnosti. Úloha má tedy dvě řešení: délky stran trojúhelníku mohou být 16 cm, 28 cm a 31 cm, nebo 19 cm, 22 cm a 34 cm.

Z9–I–3

U horské chaty nám trenér řekl: „Půjdeme-li dál tímto pohodlným tempem 4 km za hodinu, přijdeme na nádraží 45 minut po odjezdu našeho vlaku.“

Pak ukázal na skupinu, která nás právě míjela: „Ti využívají holí, a tak dosahují průměrné rychlosti 6 km za hodinu. Na nádraží budou již půl hodiny před odjezdem našeho vlaku.“

Jak bylo nádraží daleko od horské chaty? (*M. Volfová*)

Nápověda. Připomeňte si vztahy mezi průměrnou rychlostí, celkovou vzdáleností a potřebným časem.

Možné řešení. Dobu od okamžiku, kdy nás trenér motivoval u horské chaty, do odjezdu vlaku označme t (v hodinách). Délku trasy od chaty na nádraží označme s (v km).

Při pohodlném tempu bychom šli $\frac{s}{4}$ hodin a přišli bychom tři čtvrtě hodiny po odjezdu vlaku; platí tedy

$$\frac{s}{4} = t + \frac{3}{4}.$$

Chůze s holemi trvá $\frac{s}{6}$ hodin, což je o půl hodiny méně než t; platí tedy

$$\frac{s}{6} = t - \frac{1}{2}.$$

Z obou rovnic vyjádříme t:

$$t = \frac{s}{4} - \frac{3}{4}, \quad t = \frac{s}{6} + \frac{1}{2},$$

a tak dostaneme novou rovnici:

$$\frac{s}{4} - \frac{3}{4} = \frac{s}{6} + \frac{1}{2}.$$

Jejími úpravami získáme délku trasy s:

$$3s - 9 = 2s + 6,$$
$$s = 15.$$

Trasa od chaty na nádraží byla 15 km dlouhá.

Poznámka. K výsledku lze dospět i následovně. Z prvních dvou výše sestavených rovnic vyjádříme s:

$$s = 4t + 3, \quad s = 6t - 3,$$

a tak dostaneme novou rovnici

$$4t + 3 = 6t - 3,$$

odkud snadno vyjádříme $t = 3$. Zpětným dosazením obdržíme

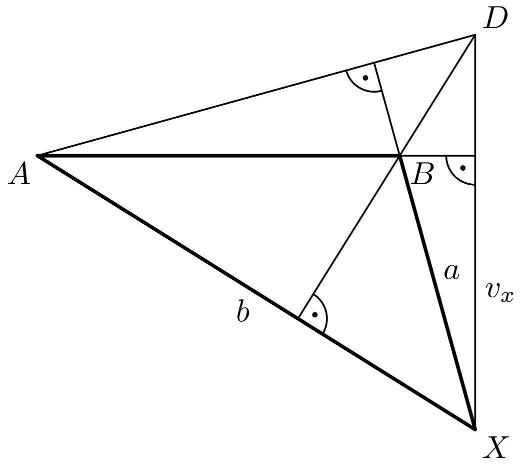
$$s = 12 + 3 = 18 - 3 = 15.$$

Z9–I–4

Pravidelný osmiúhelník $ABCDEFGH$ je vepsán kružnici o poloměru 5 cm. Sestrojte trojúhelník ABX tak, aby bod D byl ortocentrem (průsečíkem výšek) trojúhelníku ABX. (*M. Mach*)

Nápověda. Pro začátek nepracujte s osmiúhelníkem: zkonstruujte ortocentrum D v obecném trojúhelníku ABX a snažte se zrekonstruovat X, znáte-li A, B a D.

Možné řešení. Abychom si uvědomili souvislosti, uvažujeme nejprve obecný trojúhelník ABX a sestrojíme jeho ortocentrum D. Na obrázku je naznačeno řešení pro tupoúhlý trojúhelník, v tomto případě leží ortocentrum vně trojúhelníku. (Všimněte si, že u ostroúhlého trojúhelníku by ortocentrum bylo uvnitř a u pravoúhlého by splývalo s vrcholem, u něhož je pravý úhel.)



Nyní rozebereme, jak sestrojit trojúhelník ABX, je-li dána jeho strana AB a ortocentrum D. Z úvodní diskuse víme, že pokud D leží na přímce AB, pak $D = A$ nebo $D = B$ a vrchol X v tomto případě nelze určit jednoznačně. Proto předpokládáme, že body A, B a D jsou v obecné poloze, tj. neleží na jedné přímce.

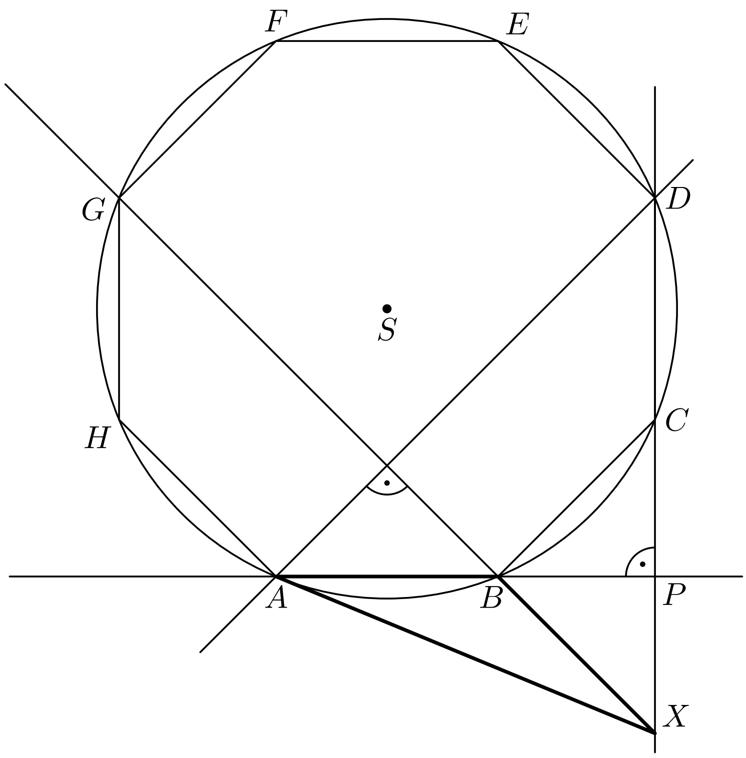
Vrchol X je společným bodem přímek obsahujících strany a, b a výšku v_x; pokud sestrojíme aspoň dvě z těchto tří přímek, bude X dán jako jejich průsečík. Výška v_x leží na přímce, která je kolmá k AB a prochází bodem D. Zbylé dvě výšky v budoucím trojúhelníku leží na přímkách AD, příp. BD. Přímka určená stranou a je kolmá k AD a prochází bodem B (podobně strana b je kolmá k BD a prochází A). Odtud plyne následující možná konstrukce trojúhelníku ABX, je-li dána jeho strana AB a ortocentrum D:

1. sestrojit přímku, která je kolmá k AB a prochází bodem D,
2. sestrojit přímku, která je kolmá k AD a prochází bodem B,
3. označit X průsečík přímek z předchozích dvou kroků,
4. narýsovat trojúhelník ABX.

(Místo 1. nebo 2. kroku konstrukce lze též uvažovat přímku, která je kolmá k BD a prochází bodem A.)

Nyní rozebereme, jak vypadá předchozí konstrukce bodu X pro trojici A, B a D v takové speciální poloze, jež je popsána v zadání pomocí pravidelného osmiúhelníku.

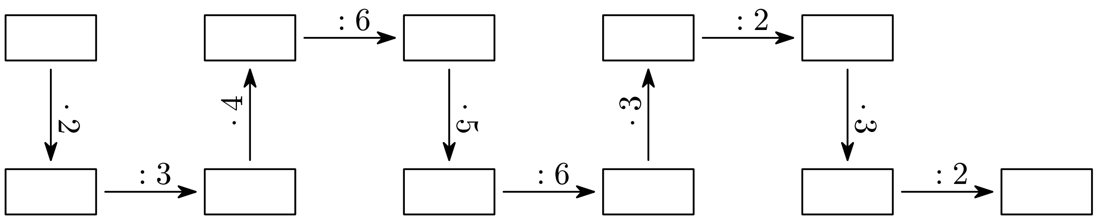
1. Kolmice k přímce AB jdoucí bodem D je právě přímka CD. (Označme P průsečík přímek AB a CD. V trojúhelníku BCP mají vnitřní úhly u vrcholů B a C velikost $45°$, neboť jde o vnější úhly pravidelného osmiúhelníku. Úhel u vrcholu P je proto pravý.)
2. Kolmice k přímce AD jdoucí bodem B je právě přímka BG. (Podobně jako výše můžeme ukázat, že přímky AH a BC jsou kolmé. Úhlopříčka BG je rovnoběžná s AH, podobně AD je rovnoběžná s BC, tudíž přímky AD a BG jsou také kolmé.)
3. Bod X je průsečíkem přímek CD a BG.
4. Výsledný trojúhelník je zvýrazněn v následujícím obrázku.



Poznámka. Všimněte si, že výše popsaná konstrukce je právě konstrukce ortocentra trojúhelníku ABD. Platí tedy, že je-li bod D ortocentrem (obecného) trojúhelníku ABX, pak bod X je ortocentrem trojúhelníku ABD. (Podobně bod B je ortocentrem trojúhelníku ADX a bod A je ortocentrem trojúhelníku BDX.)

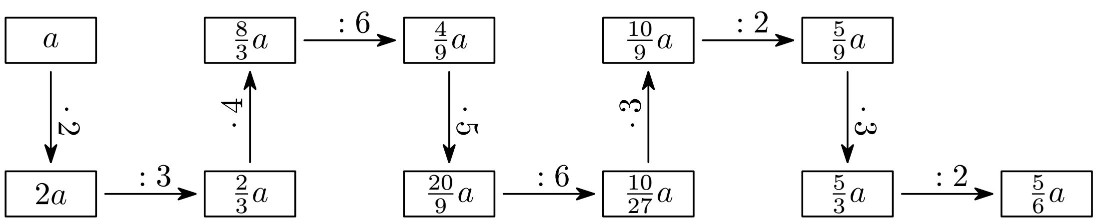
Z9–I–5

Do každého pole níže zobrazeného schématu máme zapsat čtyřmístné přirozené číslo tak, aby všechny naznačené početní operace byly správné. Kolika různými způsoby lze schéma vyplnit? (*L. Šimůnek*)



Nápověda. Číslo v některém poli označte jako neznámou a pomocí ní vyplňte celé schéma.

Možné řešení. Číslo v prvním poli označíme neznámou a a pomocí ní vyjádříme čísla ve všech ostatních polích (zlomky uvádíme v základním tvaru):



Aby všechny zapsané výrazy představovaly celá čísla, musí být neznámá a dělitelná všemi uvedenými jmenovateli. Nejmenším společným násobkem jmenovatelů 3, 9, 27 a 6 je číslo 54. Neznámá a tak musí být násobkem čísla 54.

Dále zohledníme podmínku, že všechna zapsaná čísla mají být čtyřmístná. Nejmenším zapsaným číslem je $\frac{10}{27}a$ a největším je $\frac{8}{3}a$. Proto musí platit:

- $\frac{10}{27}a \geqq 1\,000$, po úpravě $a \geqq 2\,700$,
- $\frac{8}{3}a \leqq 9\,999$, po úpravě $a \leqq 3\,749\frac{5}{8}$.

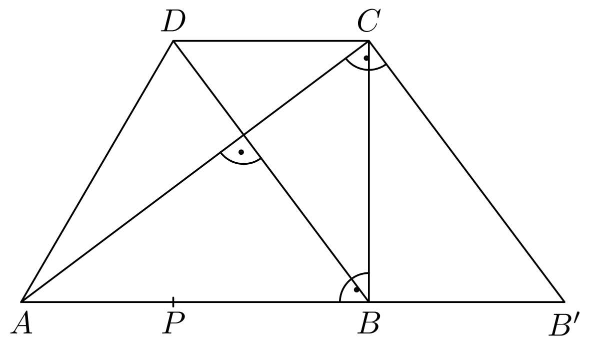
Určíme počet násobků čísla 54 v intervalu od 2 700 do 3 749. Nejmenším z nich je hned 2 700 a dále jich je ještě 19, protože $(3\,749 - 2\,700) : 54 = 19$ (zbytek 23). Do prvního pole lze tudíž doplnit celkem 20 různých čísel, neboli schéma lze vyplnit 20 způsoby.

Z9–I–6

Je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s pravým úhlem u vrcholu B a s rovnoběžnými stranami AB a CD. Úhlopříčky lichoběžníku jsou na sebe kolmé a mají délky $|AC| = 12\,\text{cm}$, $|BD| = 9\,\text{cm}$. Vypočítejte obvod a obsah tohoto lichoběžníku. (*M. Krejčová*)

Nápověda. Obsah tohoto lichoběžníku je stejný jako obsah vhodného pravoúhlého trojúhelníku. Nejprve najděte takový trojúhelník, poté určete délky stran lichoběžníku a jeho obvod.

Možné řešení. Bodem C vedeme rovnoběžku s úhlopříčkou BD a její průsečík s přímkou AB označíme B', viz obrázek. Protože přímky AB a CD jsou také rovnoběžné, je $BB'CD$ kosodélník a platí $|B'C| = |BD| = 9\,\text{cm}$ a $|B'B| = |CD|$.



Smysl této konstrukce spočívá v pozorování, že trojúhelníky ACD a $CB'B$ mají stejný obsah (strany CD a $B'B$ jsou shodné a výšky obou trojúhelníků na tyto strany jsou stejné). Proto je obsah lichoběžníku $ABCD$ stejný jako obsah trojúhelníku $AB'C$ a tento umíme snadno určit: Z konstrukce plyne, že trojúhelník $AB'C$ je pravoúhlý, a ze zadání známe obě jeho odvěsny $|AC| = 12\,\mathrm{cm}$ a $|B'C| = 9\,\mathrm{cm}$. Obsah trojúhelníku $AB'C$, tedy i zadaného lichoběžníku, je roven

$$S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54\,(\mathrm{cm}^2).$$

Abychom určili obvod lichoběžníku, potřebujeme znát délky všech jeho stran.

a) Strana BC je výškou na stranu AB' v právě zmiňovaném trojúhelníku. Z Pythagorovy věty spočítáme délku přepony v trojúhelníku $AB'C$:

$$|AB'| = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15\,(\mathrm{cm}).$$

Ze znalosti obsahu tohoto trojúhelníku určíme jeho výšku $|BC|$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot |BC| &= 54, \\ |BC| &= 7{,}2\,(\mathrm{cm}). \end{aligned}$$

b) V pravoúhlém trojúhelníku ABC známe jeho přeponu a nyní také jednu odvěsnu; pomocí Pythagorovy věty určíme délku druhé odvěsny:

$$|AB| = \sqrt{12^2 - 7{,}2^2} = 9{,}6\,(\mathrm{cm}).$$

c) Zřejmě platí $|AB'| = |AB| + |BB'|$ a $|BB'| = |CD|$, odkud snadno vyjádříme délku strany CD:

$$|CD| = |AB'| - |AB| = 15 - 9{,}6 = 5{,}4\,(\mathrm{cm}).$$

d) Stranu AD můžeme vidět jako přeponu v pravoúhlém trojúhelníku APD, kde P je pata kolmice z bodu D na stranu AB. Délky odvěsen v tomto trojúhelníku jsou $|PD| = |BC| = 7{,}2\,\mathrm{cm}$ a $|AP| = |AB| - |CD| = 9{,}6 - 5{,}4 = 4{,}2\,(\mathrm{cm})$. Podle Pythagorovy věty spočítáme i délku přepony:

$$|AD| = \sqrt{7{,}2^2 + 4{,}2^2} \doteq 8{,}3\,(\mathrm{cm}).$$

Obvod zadaného lichoběžníku je tedy přibližně roven

$$o = |AB| + |BC| + |CD| + |DA| \doteq 9{,}6 + 7{,}2 + 5{,}4 + 8{,}3 = 30{,}5\,(\mathrm{cm}).$$

Poznámka. Pro zajímavost a kontrolu uvádíme ještě výpočet obsahu lichoběžníku pomocí obvyklého vzorce:

$$S = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|) \cdot |BC| = \frac{1}{2}(9{,}6 + 5{,}4) \cdot 7{,}2 = 54\,(\mathrm{cm}^2).$$

Všimněte si, že úvahy v úvodu našeho řešení platnost tohoto vzorce vlastně zdůvodňují.

Vztah pro výpočet obsahu zadaného lichoběžníku lze odvodit také pomocí následujícího obrázku. Na něm je čárkovaně znázorněn obdélník, jehož každá strana prochází některým vrcholem lichoběžníku a je rovnoběžná s některou jeho úhlopříčkou. Obsah obdélníku je roven součinu $|AC| \cdot |BD|$. Obsah lichoběžníku je evidentně poloviční, tedy $S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD|$.