III. kolo kategorie Z9

Z9–III–1

V malém království přišli poddaní pozdravit nového krále a jeho ministra. Každý přinesl nějaký dárek: 60 nejchudších přineslo jen vlastnoručně vyrobenou dřevěnou sošku, ti bohatší buď 2 zlaťáky, nebo 3 stříbrňáky. Přitom stříbrňáků bylo darováno více než 40, ale méně než 100. Všechny sošky dostal ministr a k tomu ještě sedminu všech zlaťáků a třetinu všech stříbrňáků. Král i jeho ministr dostali stejný počet předmětů.

Zjistěte, kolik mohlo být poddaných, kolik mohlo být darováno zlaťáků a kolik stříbrňáků. (*M. Volfová*)

Možné řešení. Označíme počet zlaťáků z a počet stříbrňáků s. Zlaťáky byly darovány po dvou, tedy z je sudé číslo, stříbrňáky po třech, tedy s je dělitelné třemi. Přitom s je mezi 40 a 100. Ministr dostal 60 sošek a $\frac{1}{7}z + \frac{1}{3}s$ mincí, král dostal $\frac{6}{7}z + \frac{2}{3}s$ mincí. Odtud plyne, že z musí být dělitelné 7, což s předchozí podmínkou znamená, že z musí být dělitelné 14. Král i jeho ministr dostali stejný počet předmětů, což při našem značení dává rovnici

$$60 + \frac{z}{7} + \frac{s}{3} = \frac{6z}{7} + \frac{2s}{3}, \tag{1}$$

po úpravě

$$\begin{aligned} \frac{5z}{7} + \frac{s}{3} &= 60, \\ 15z + 7s &= 7 \cdot 3 \cdot 60. \end{aligned} \tag{2}$$

Hledáme všechna celočíselná řešení rovnice (2), která vyhovují výše uvedeným podmínkám. Vyjádříme-li neznámou z,

$$z = 84 - \frac{7s}{15}, \tag{3}$$

vidíme, že s musí být dělitelné 15. V úvodu jsme si všimli, že z má být sudé, tudíž i hodnota výrazu $\frac{7}{15}s$ musí být sudá, což znamená, že také s musí být sudé číslo. Proto s musí být dělitelné 30, což s přihlédnutím k podmínce $40 < s < 100$ znamená, že s může být jedině 60 a 90. Pro obě tyto možnosti dopočítáme z podle (3), počet poddaných pak určíme jako $60 + \frac{1}{3}s + \frac{1}{2}z$. Úloha má následující dvě řešení (uvědomte si, že všechny výše zmiňované podmínky jsou splněny):

stříbrňáků	zlaťáků	poddaných
60	56	108
90	42	111

Jiné řešení. Rovnici (2) lze řešit také tak, že vyjádříme neznámou s:

$$s = 180 - \frac{15z}{7}.$$

Z úvodu víme, že z musí být dělitelné 14, proto za z postupně dosazujeme násobky 14 a sledujeme, zda platí $40 < s < 100$. Pokud ano, vypočteme počet poddaných jako $60 + \frac{1}{3}s + \frac{1}{2}z$ (uvědomte si, že ostatní výše zmiňované podmínky jsou splněny):

zlaťáků	stříbrňáků	poddaných
14	150	
28	120	
42	**90**	**111**
56	**60**	**108**
70	30	

Dále nepokračujeme, protože s vychází menší než 40; úloha má dvě řešení.

Hodnocení. 2 body za sestavení rovnice (1) a její následnou úpravu; 2 body za nalezení jedné možnosti; 1 bod za nalezení druhé možnosti; 1 bod za zdůvodnění, že řešení není více.

Z9–III–2

Matěj měl na řádku v sešitě napsáno šest různých přirozených čísel. Druhé z nich bylo dvojnásobkem prvního, třetí bylo dvojnásobkem druhého a podobně každé další číslo bylo dvojnásobkem předchozího. Matěj všechna tato čísla opsal do následující tabulky, a to v náhodném pořadí, do každého pole jedno.

Součet obou čísel v prvním sloupci tabulky byl 136 a součet čísel ve druhém sloupci byl dvojnásobný, tedy 272. Určete součet čísel ve třetím sloupci tabulky. (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Nejmenší doplňované číslo označíme neznámou a a pomocí ní vyjádříme všechna doplňovaná čísla:

$$a,\ 2a,\ 4a,\ 8a,\ 16a,\ 32a.$$

V prvním sloupci nemůže být číslo $32a$, neboť součet jakýchkoli jiných dvou doplňovaných čísel je menší než $32a$, a tudíž by součet čísel v druhém sloupci nemohl být větší než v prvním. Možné součty čísel prvního sloupce jsou:

$$\begin{array}{cccc}
a+2a=3a & 2a+4a=6a & 4a+8a=12a & 8a+16a=24a \\
a+4a=5a & 2a+8a=10a & 4a+16a=20a & \\
a+8a=9a & 2a+16a=18a & & \\
a+16a=17a & & &
\end{array}$$

Přirozené číslo, které v těchto součtech násobí neznámou a, musí být dělitelem čísla $136 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 17$. Tomu vyhovuje jedině součet

$$17a = a + 16a.$$

Součet čísel druhého sloupce je pak $34a$ a tento lze získat jedině jako

$$34a = 2a + 32a.$$

K doplnění do třetího sloupce tedy zbývají čísla $4a$ a $8a$. Z rovnice $17a = 136$ dostaneme $a = 8$; součet čísel ve třetím sloupci je tedy

$$4a + 8a = 12a = 12 \cdot 8 = 96.$$

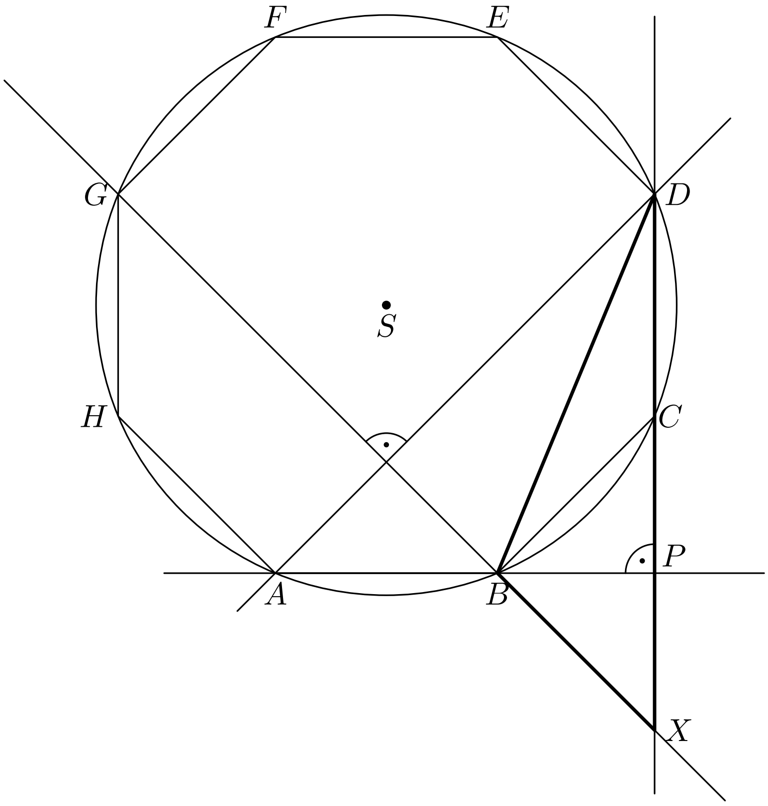
Hodnocení. 3 body za poznatek, že v prvním sloupci je a a $16a$, včetně zdůvodnění, že jde o jedinou možnost; 1 bod za poznatek, že ve třetím sloupci je $4a$ a $8a$; 2 body za výsledek 96.

Z9–III–3

Je dán pravidelný osmiúhelník $ABCDEFGH$ a bod X tak, že bod A je ortocentrem (průsečíkem výšek) trojúhelníku BDX. Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku. (*V. Žádník*)

Možné řešení. Bod A má být průsečíkem výšek v trojúhelníku BDX. To znamená, že na spojnici bodu A s vrcholem B leží výška na stranu DX, podobně na spojnici A s vrcholem D leží výška na stranu BX. Strana DX je tedy kolmá na přímku AB, podobně strana BX je kolmá na přímku AD. Vzhledem k tomu, že body A, B a D jsou vrcholy pravidelného osmiúhelníku, platí:

1. Kolmice k AB procházející bodem D je přímka CD. (Vnější úhel pravidelného osmiúhelníku má velikost 45°. Úhel mezi AB a CD je úhlem u vrcholu P v trojúhelníku BPC, a proto je pravý.)
2. Kolmice k AD procházející bodem B je přímka BG. (AD a BG jsou úhlopříčky rovnoběžné se stranami BC a AH. Tyto jsou stejně jako strany AB a CD kolmé, a proto jsou zmíněné úhlopříčky kolmé.)
3. Bod X je průsečíkem přímek CD a BG.



Nyní snadno určíme všechny úhly v trojúhelníku BDX. Trojúhelník BCD je rovnoramenný s rameny BC a CD, přičemž úhel BCD je vnitřním úhlem pravidelného osmiúhelníku. Odtud dopočítáme

$$|\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle CBD| = \frac{1}{2}(180^\circ - 135^\circ) = 22{,}5^\circ.$$

Přímky AD a BC jsou rovnoběžné, úhel mezi AD a BG je pravý, proto také úhel CBX je pravý. Odtud vyjádříme

$$|\sphericalangle DBX| = 22{,}5^\circ + 90^\circ = 112{,}5^\circ.$$

Poslední neznámý vnitřní úhel v trojúhelníku BDX má velikost

$$|\sphericalangle DXB| = 180^\circ - 22{,}5^\circ - 112{,}5^\circ = 45^\circ.$$

Hodnocení. 3 body za nalezení bodu X; po 1 bodu za hledané úhly včetně zdůvodnění.

Poznámka. Podobnou úlohu známe z domácího kola (**Z9–I–4**), takže úvodní rozbor je možné zestručnit: X je průsečíkem výšek v trojúhelníku ABD.

V předchozím několikrát používáme zásadní poznatek, že součet velikostí vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku je 180°. Odtud zejména vyplývá, že velikost vnitřního úhlu v pravidelném osmiúhelníku je 135°.

Z9–III–4

Ve slově PAMPELIŠKA mají být nahrazena stejná písmena stejnými nenulovými číslicemi a různá písmena různými nenulovými číslicemi. Přitom má platit, že součin číslic výsledného čísla je druhou mocninou nějakého přirozeného čísla. Najděte největší číslo, které lze nahrazením písmen při splnění uvedených podmínek získat. (*E. Patáková*)

Možné řešení. Ve slově PAMPELIŠKA je 8 různých písmen. Smíme používat pouze nenulové číslice, vybíráme tedy osm číslic z devíti možných. Součin

$$P^2 \cdot A^2 \cdot M \cdot E \cdot L \cdot I \cdot \check{S} \cdot K$$

má být druhou mocninou přirozeného čísla. Číslice P a A jsou v součinu ve druhé mocnině, stačí proto zajistit, aby součin

$$M \cdot E \cdot L \cdot I \cdot \check{S} \cdot K \tag{1}$$

byl druhou mocninou přirozeného čísla, tzn. aby v jeho prvočíselném rozkladu byla všechna prvočísla v sudé mocnině. Uvažme, které činitele můžeme dosazovat:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	$2 \cdot 2$	5	$2 \cdot 3$	7	$2 \cdot 2 \cdot 2$	$3 \cdot 3$

Číslice 5 a 7 nemůžeme v součinu (1) použít, protože je nemáme čím doplnit do druhé mocniny. Číslo, které vznikne nahrazením písmen ve slově PAMPELIŠKA, má být co největší, proto se snažíme postupně doplňovat co největší hodnoty za P, A, M atd.

Pokud jako P zvolíme 9, zbude pro součin (1) šestice číslic 8, 6, 4, 3, 2, 1. Po dosazení tento součin vychází $2^7 \cdot 3^2$, což nevyhovuje výše uvedenému požadavku.

Pokud jako P zvolíme 8, zbude pro součin (1) šestice 9, 6, 4, 3, 2, 1, která po dosazení dává $2^4 \cdot 3^4$, což uvedenému požadavku vyhovuje. Těmito číslicemi nahradíme M, E, L, I, $\check{S}$, K právě v tomto sestupném pořadí. Pro A pak zbývají číslice 5 nebo 7 — vybíráme větší z nich. Hledané číslo je

$$8\,798\,643\,217.$$

Hodnocení. 2 body za poznatek, že čísla 5 a 7 nemohou být v součinu (1); 2 body za zdůvodnění, že je třeba volit $P = 8$; 2 body za výsledné číslo.