63. ročník Matematické olympiády

I. kolo kategorie Z5

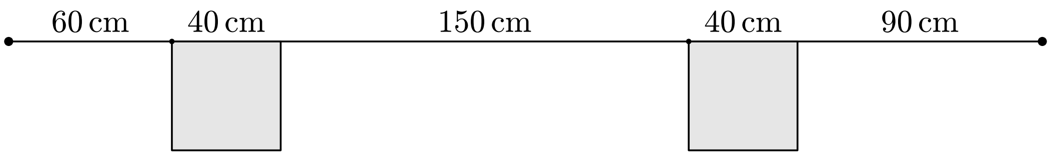
Z5–I–1

Mezi dvěma tyčemi je napnutá šňůra dlouhá 3,8 m, na kterou chce maminka pověsit vyprané kapesníky. Všechny kapesníky mají tvar čtverce o straně 40 cm. Na šňůře však už visí dva kapesníky stejného tvaru od sousedky a ty chce maminka nechat na svých místech. Přitom levý roh jednoho z těchto kapesníků je 60 cm od levé tyče a levý roh toho druhého je 1,3 m od pravé tyče.

Kolik nejvíce kapesníků může maminka na šňůru pověsit? Kapesníky se věší natažené za oba rohy tak, aby se žádné dva nepřekrývaly. (*M. Mach*)

Nápověda. Pomozte si náčrtem s vyznačenými danými vzdálenostmi.

Možné řešení. Celou situaci si lze pro názornost překreslit například takto:



Sousedčiny kapesníky dělí šňůru na 3 různě dlouhé díly, do kterých může maminka věšet svoje kapesníky. Mezi levým rohem jednoho kapesníku a levou tyčí je 60 cm. Mezi levým rohem druhého kapesníku a pravou tyčí je 130 cm a kapesník je široký 40 cm; to znamená, že mezi jeho pravým rohem a pravou tyčí je vzdálenost 90 cm. Jelikož je šňůra dlouhá 380 cm, mezi kapesníky zbývá 150 cm volné šňůry.

Mezi levý kapesník a levou tyč se vejde pouze jeden maminčin kapesník (dva kapesníky vedle sebe by zabraly 80 cm šňůry a volných je zde pouze 60 cm). Mezi sousedčiny kapesníky může maminka pověsit tři své (ty zaberou 120 cm, když se pověsí těsně vedle sebe, k přidání čtvrtého by byla potřeba mezera dlouhá 160 cm). Mezi pravý kapesník a pravou tyč se vejdou dva další maminčiny kapesníky. Celkem tedy maminka může na šňůru přivěsit $1 + 3 + 2 = 6$ svých kapesníků.

Poznámka. Pokud bude řešitel uvažovat vzdálenost 1,3 m od pravé tyče k pravému rohu kapesníku, vyjde mu rovněž výsledek „6 kapesníků“. Takové řešení však nemůže být uznáno jako správné.

Z5–I–2

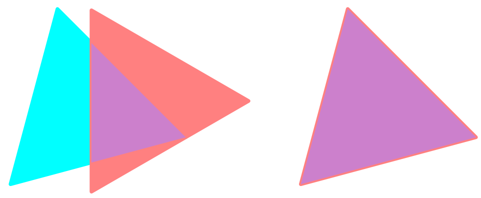
Vojta má dvě stejná sklíčka tvaru rovnostranného trojúhelníku, která se liší pouze svou barvou — jedno je červené, druhé modré. Pokud se sklíčka položí přes sebe, vznikne útvar fialové barvy. Udejte příklad překrývání sklíček, při kterém mohl Vojta dostat:

a) fialový trojúhelník,
b) fialový čtyřúhelník,
c) fialový pětiúhelník,
d) fialový šestiúhelník. (*E. Novotná*)

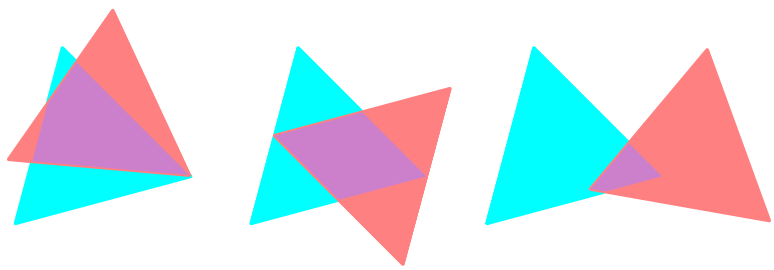
Nápověda. Pokud vám nestačí představivost, vystřihněte si dva takové trojúhelníky z papíru a zkoušejte je pokládat různě přes sebe.

Možné řešení. Každý z fialových mnohoúhelníků lze realizovat mnoha různými způsoby; uvádíme několik možných příkladů.

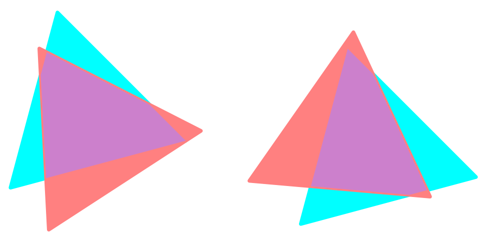
a) fialový trojúhelník:



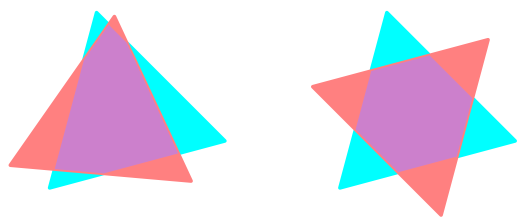
b) fialový čtyřúhelník:



c) fialový pětiúhelník:



d) fialový šestiúhelník:



Z5–I–3

Palindrom je takové číslo, které je stejné, ať ho čteme zepředu nebo zezadu. (Např. číslo 1881 je palindromem.)

Najděte dvojmístný a trojmístný palindrom tak, aby jejich součet byl čtyřmístným palindromem. (*M. Volfová*)

Nápověda. Jakou číslici má čtyřmístný palindrom na prvním místě?

Možné řešení. Součtem dvojmístného a trojmístného čísla lze získat nejvýše číslo 1 098. Je-li součtem čtyřmístné číslo, musí být jeho první číslice 1. První číslice trojmístného sčítance musí být 9, neboť kdyby byl tento sčítanec menší než 900, byl by součet menší než 1 000.

V našem případě jsou všechna čísla palindromy, proto známe také poslední číslice trojmístného sčítance i výsledného součtu:

$$** + 9{*}9 = 1{**}1.$$

Odtud plyne, že druhá číslice u prvního sčítance musí být 2 — dvojmístný palindrom je 22:

$$22 + 9{*}9 = 1{**}1.$$

Nejmenší možný palindrom na pravé straně je 1 001; ten je součtem 22 a 979. Další čtyřmístné palindromy (1 111, 1 221, ...) nelze takto vyjádřit, protože jsou větší než 1 098. Jediné možné řešení úlohy je:

$$22 + 979 = 1\,001.$$

Z5–I–4

Evě se líbí čísla dělitelná šesti, Zdeně čísla obsahující aspoň jednu šestku a Janě čísla, jejichž ciferný součet je 6.

1. Která dvojmístná čísla se líbí všem třem dívkám?
2. Která dvojmístná čísla se dvěma dívkám líbí, ale jedné se nelíbí?

(*M. Petrová*)

Nápověda. Určete, která dvojmístná čísla se líbí jednotlivým dívkám.

Možné řešení. Evě se líbí čísla, která se dají beze zbytku dělit šesti; všechny dvojmístné násobky čísla 6 jsou:

$$12,\ 18,\ 24,\ 30,\ 36,\ 42,\ 48,\ 54,\ 60,\ 66,\ 72,\ 78,\ 84,\ 90,\ 96.$$

Dvojmístná čísla, která se líbí Zdeně, jsou:

$$16,\ 26,\ 36,\ 46,\ 56,\ 60,\ 61,\ 62,\ 63,\ 64,\ 65,\ 66,\ 67,\ 68,\ 69,\ 76,\ 86,\ 96.$$

Dvojmístná čísla, která se líbí Janě, jsou:

$$15,\ 24,\ 33,\ 42,\ 51,\ 60.$$

Pro lepší představu si všechna zmiňovaná čísla zapíšeme do tabulky:

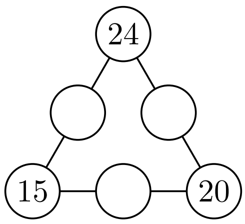
Eva	12			18	24		30		36	42		48		54		60
Zdena			16			26			36		46				56	60
Jana		15			24			33		42			51			60

Eva						66				72		78	84		90	96
Zdena	61	62	63	64	65	66	67	68	69		76			86		96
Jana																

Odtud je vidět, že všem třem dívkám se líbí jen číslo 60. Právě dvěma dívkám se líbí čísla 24, 36, 42, 66 a 96.

Z5–I–5

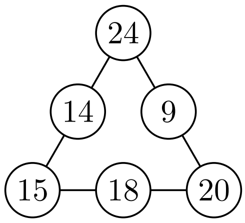
Doplňte do prázdných kroužků přirozená čísla tak, aby součet čísel na každé straně trojúhelníku byl stejný a aby součet všech šesti čísel byl 100. (*L. Šimůnek*)



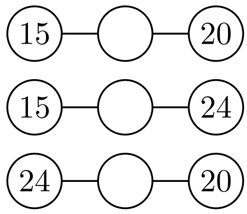
Nápověda. Pro začátek dodržte pouze první podmínku, tedy vyplňte trojúhelník tak, aby součet na všech jeho stranách byl stejný.

Možné řešení. Nejmenší číslo, které máme doplnit, bude na straně s čísly 24 a 20, neboť ze známých čísel dávají právě tato dvě největší součet. Zkusme do prázdného pole na této straně doplnit nejmenší možné přirozené číslo, tedy 1. V takovém případě by součet na straně trojúhelníku byl $24 + 1 + 20 = 45$. Do zbylých prázdných polí by pak patřila čísla $45 - 15 - 20 = 10$ a $45 - 15 - 24 = 6$.

Součet všech šesti čísel by v tomto případě byl $24+1+20+10+15+6 = 76$, což je o 24 méně než požadovaných 100. Každé z doplněných čísel proto musíme zvětšit o $24 : 3 = 8$. Do prázdných polí patří čísla $1 + 8 = 9$, $10 + 8 = 18$ a $6 + 8 = 14$:



Jiné řešení. Čísla v prázdných polích mají dát součet $100 - 24 - 20 - 15 = 41$. Každou stranu trojúhelníku zobrazíme zvlášť:



Všech devět čísel tohoto schématu dává součet $41 + 2 \cdot (15 + 24 + 20) = 159$. Na každém řádku schématu, resp. na každé straně trojúhelníku, má tedy být součet $159 : 3 = 53$. Čísla v prázdných polích jsou $53 - 24 - 20 = 9$, $53 - 15 - 20 = 18$, $53 - 15 - 24 = 14$.

Z5–I–6

Recepční v hotelu si vykládala karty a dostala následující posloupnost:

$$5,\ 9,\ 2,\ 7,\ 3,\ 6,\ 8,\ 4.$$

Přesunula dvě sousední karty na jiné místo tak, že tato dvojice opět sousedila, a to ve stejném pořadí. Tento krok provedla celkem třikrát, dokud nebyly karty uspořádány vzestupně podle své hodnoty.

Zjistěte, jak recepční postupovala. (*L. Hozová*)

Nápověda. Zkoušejte přesouvat hrací karty popsaným způsobem.

Možné řešení. Všimněme si, že když přesuneme dvojici $(3, 6)$ mezi čísla 2 a 7, dostaneme tak dvě dvojice po sobě jdoucích čísel, která jsou navíc seřazená podle velikosti:

$$5,\ 9,\ 2,\ \mathbf{3},\ \mathbf{6},\ 7,\ 8,\ 4.$$

Mezi čísla 3 a 6 potřebujeme vložit čísla 4 a 5. Ta ale nejsou u sebe, přesuneme tedy dvojici $(5, 9)$ za číslo 4. Tím jednak dostaneme číslo 5 hned vedle čísla 4, jednak číslo 9 bude na konci posloupnosti:

$$2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8,\ 4,\ \mathbf{5},\ \mathbf{9}.$$

V posledním kroku přesuneme dvojici (4, 5) mezi čísla 3 a 6:

$$2,\ 3,\ \mathbf{4},\ \mathbf{5},\ 6,\ 7,\ 8,\ 9.$$

Poznámka. Je samozřejmě možné zaměnit první a druhý krok; postup recepční tedy není jednoznačný.

63. ročník Matematické olympiády

I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

V továrně na výrobu plyšových hraček mají dva stroje. První vyrobí čtyři zajíce za stejnou dobu, za kterou vyrobí druhý pět medvědů. Aby bylo jejich ovládání jednodušší, oba dva stroje se spouští a vypínají najednou společným vypínačem. Navíc jsou stroje seřízené tak, že první po spuštění nejdříve vyrobí tři zajíce růžové, pak jednoho modrého, pak zase tři růžové atd. Druhý po spuštění nejprve vyrobí čtyři medvědy modré, pak jednoho růžového, pak opět čtyři modré atd.

V jistém okamžiku bylo na těchto dvou strojích vyrobeno celkem 220 modrých hraček. Kolik bylo k témuž okamžiku vyrobeno růžových zajíců? (*M. Petrová*)

Nápověda. Zjistěte, kolik je vyrobeno modrých hraček poté, co první stroj dokončí čtvrtého zajíce.

Možné řešení. Době, za kterou první stroj vyrobí 4 hračky a druhý stroj 5 hraček, budeme říkat „cyklus". Během jednoho cyklu se tedy vyrobí: 3 růžoví zajíci, 1 modrý zajíc, 4 modří medvědi a 1 růžový medvěd, tj. celkem 4 růžové a 5 modrých hraček.

To znamená, že 220 modrých hraček se vyrobí za $220 : 5 = 44$ úplných cyklů. Protože za jeden cyklus první stroj vyrobí 3 růžové zajíce, za 44 cyklů vyrobí $44 \cdot 3 = 132$ růžových zajíců. V každém cyklu se nejprve vyrábějí růžoví zajíci a pak teprve modrý. Proto v okamžiku, kdy oba stroje vyrobí 220 modrých hraček, bylo na prvním stroji vyrobeno 132 růžových zajíců.

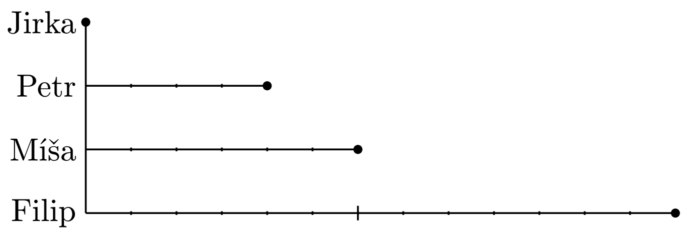
Z6–I–2

Jirka, Míša, Petr, Filip a Saša skákali do dálky. Saša skočil 135 cm, Petr skočil o 4 cm více než Jirka, Jirka o 6 cm méně než Míša a Míša o 7 cm méně než Filip. Navíc Filipův skok byl přesně v polovině mezi tím Petrovým a Sašovým.

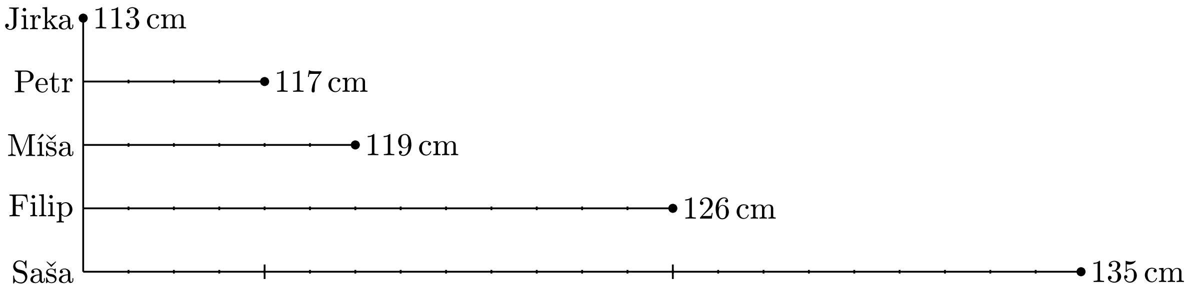
Zjistěte, kolik cm skočili jednotliví chlapci. (*M. Dillingerová*)

Nápověda. Porovnejte délky Jirkova, Míšova, Petrova a Filipova skoku.

Možné řešení. Prozatím neuvažujme Sašův skok a délky skoků ostatních chlapců seřaďme od nejkratšího po nejdelší. Ze zadání je zřejmé, že nejméně skočil Jirka: Petr skočil o 4 cm více než Jirka, Míša skočil o 6 cm více než Jirka, Filip skočil o 7 cm více než Míša, tedy o 13 cm více než Jirka.



Protože Filipův skok má být přesně v polovině mezi Petrovým a Sašovým a protože Petr skočil méně než Filip, musel Saša skočit nejvíc ze všech chlapců. A protože Filip skočil o 9 cm víc než Petr ($13 - 4 = 9$), musel tedy zároveň skočit o 9 cm méně než Saša. Odtud určíme, že Filip skočil 126 cm ($135 - 9 = 126$), Jirka skočil 113 cm ($126 - 13 = 113$), Petr skočil 117 cm ($113 + 4 = 117$) a Míša skočil 119 cm ($113 + 6 = 119$).



Z6–I–3

Kolik musíme napsat číslic, chceme-li vypsat všechna přirozená čísla od 1 do 2 013? (*M. Volfová*)

Nápověda. Počítejte systematicky.

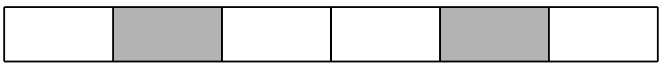
Možné řešení. Musíme napsat všechna jedno-, dvoj- a trojmístná čísla a část čtyřmístných čísel. Postupně počítáme počty napsaných čísel a číslic:

napsaná čísla	počet čísel	počet číslic
1, . . . , 9	9	9
10, . . . , 99	90	180
100, . . . , 999	900	2 700
1 000, . . . , 2 013	1 014	4 056
celkem	2 013	6 945

K zapsání čísel od 1 do 2 013 je třeba 6 945 číslic.

Z6–I–4

Správně vyplněná tabulka na obrázku má obsahovat šest přirozených čísel, přičemž v šedém poli má být součet čísel z dvou bílých polí, která s ním sousedí.



Určete čísla správně vyplněné tabulky, víte-li, že součet prvních dvou čísel zleva je 33, součet prvních dvou čísel zprava je 28 a součet všech šesti čísel je 64. (*L. Šimůnek*)

Nápověda. Jaký součet dává třetí a čtvrté číslo?

Možné řešení. Součet třetího a čtvrtého přirozeného čísla je $64 - 33 - 28 = 3$, jsou to tudíž čísla 1 a 2. Nejprve předpokládejme, že číslo 1 je na třetí pozici a číslo 2 na čtvrté. Na první pozici by pak bylo $(33 - 1) : 2 = 16$ a na šesté $(28 - 2) : 2 = 13$.

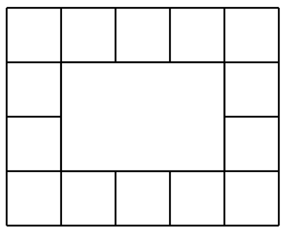
Ještě prověřme možnost, kdy číslo 1 je na čtvrté pozici a číslo 2 na třetí. Na první pozici by pak muselo být $(33 - 2) : 2 = 15{,}5$, což nepřipouští zadání, neboť v tabulce mají být přirozená čísla. Tabulku lze tedy vyplnit jediným způsobem:

16	17	1	2	15	13

Z6–I–5

Adam dostal od dědečka dřevěné kostky. Všechny byly stejné a byly to krychle s hranou dlouhou 4 cm. Rozhodl se, že z nich bude skládat komíny, a to takové:

- aby byly použity všechny kostky,
- aby komín při pohledu shora vypadal jako „dutý obdélník“ nebo „dutý čtverec“ ohraničený jednou řadou kostek (podobně jako na obrázku),
- aby ani v nejvyšší vrstvě žádná kostka nechyběla.



Adam zjistil, že podle těchto pravidel může postavit komín vysoký 16 cm, nebo 20 cm, nebo 24 cm.

1. Jaký nejmenší počet kostek mohl Adam dostat od dědečka?
2. Jak vysoký je nejvyšší komín, který může Adam s tímto počtem kostek postavit podle uvedených pravidel?

(*M. Petrová*)

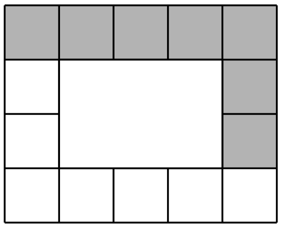
Nápověda. Rozhodněte, zda mohl Adam dostat například 100 kostek.

Možné řešení. Nejprve spočítáme, kolik vrstev měly jednotlivé Adamovy komíny:

1. komín: $16 : 4 = 4$,
2. komín: $20 : 4 = 5$,
3. komín: $24 : 4 = 6$.

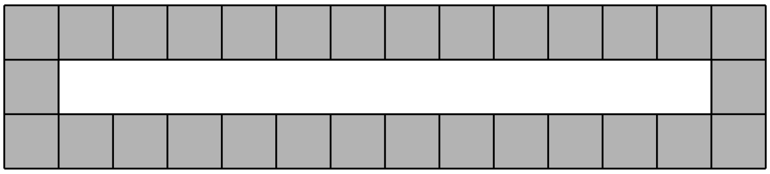
Protože všechny vrstvy byly úplné, musí být počet kostek dělitelný čtyřmi, pěti a šesti zároveň. Nejmenší společný násobek těchto tří čísel je 60, počet kostek proto musí být nějakým násobkem šedesáti. Ověříme, zda mohl Adam dostat 60 kostek:

1. komín má 4 vrstvy, což by znamenalo 15 kostek v jedné vrstvě ($60 : 4 = 15$). To ale není možné, protože v každé vrstvě je sudý počet kostek („had“ z kostek se dá vždycky rozdělit na 2 stejné části, viz obrázek).

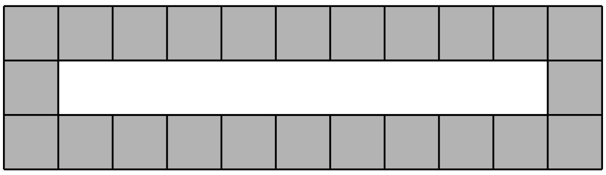


Adam tedy dostal více než 60 kostek; další možnost je $2 \cdot 60 = 120$:

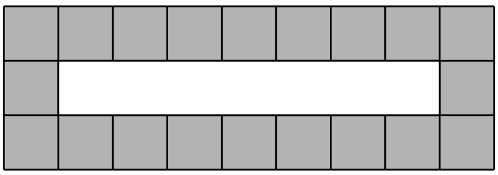
1. komín má 4 vrstvy, tzn. 30 kostek v jedné vrstvě ($120 : 4 = 30$). To lze splnit např. takto:



2. komín má 5 vrstev, tzn. 24 kostek v jedné vrstvě ($120 : 5 = 24$). To lze splnit např. takto:

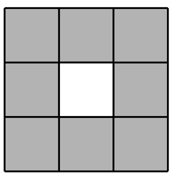


3. komín má 6 vrstev, tzn. 20 kostek v jedné vrstvě ($120 : 6 = 20$). To lze splnit např. takto:



Tím jsme dokázali, že nejmenší počet kostek, který mohl Adam dostat, je 120.

Nyní ještě zjistíme výšku nejvyššího komínu, který lze ze 120 kostek postavit podle Adamových pravidel. Na jednu vrstvu potřebujeme nejméně 8 kostek:

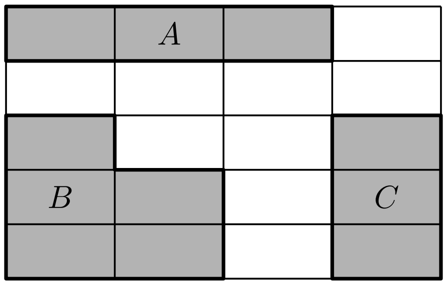


V takovém případě bude mít komín 15 úplných vrstev ($120 : 8 = 15$). Kostky jsou vysoké 4 cm, takže nejvyšší komín, který lze postavit ze 120 kostek, měří 60 cm ($15 \cdot 4 = 60$).

Z6–I–6

Na obrázku je síť složená z 20 shodných obdélníků, do které jsme zakreslili tři obrazce a vybarvili je. Obdélník označený písmenem A a šestiúhelník označený písmenem B mají shodné obvody, a to 56 cm. Vypočítejte obvod třetího obrazce označeného písmenem C.

(*L. Šimůnek*)



Nápověda. Určete, o kolik vodorovných a o kolik svislých dílků se liší obvody obrazců A a B.

Možné řešení. Délky stran obdélníků, z nichž se skládá síť, označme x a y (x pro vodorovnou stranu a y pro svislou). Obvod obrazce A je roven $6x + 2y$, obvod obrazce B je $4x + 6y$ a obvod obrazce C je $2x + 6y$.

V obvodu obrazce A je započítáno o 2 délky x více a o 4 délky y méně než v obvodu obrazce B. Obvody A a B jsou podle zadání stejné, tedy $2x$ je rovno $4y$. Odtud vidíme, že x je dvakrát větší než y, tedy že $x = 2y$. Obvod obrazce A tak můžeme vyjádřit jako $14y$, odtud $y = 56 : 14 = 4$ (cm). Obvod obrazce C je $10y = 10 \cdot 4 = 40$ (cm).

I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Na lavičce v parku sedí vedle sebe Andulka, Barborka, Cilka, Dominik a Eda. Andulce jsou 4 roky, Edovi je 10 let, součin věků Andulky, Barborky a Cilky je 140, součin věků Barborky, Cilky a Dominika je 280 a součin věků Cilky, Dominika a Edy je 560. Kolik roků je Cilce? (*L. Hozová*)

Nápověda. Zkuste nejprve určit, kolik roků je Dominikovi.

Možné řešení. Pro zjednodušení budeme věk každého dítěte značit počátečním písmenem jeho jména. Podle zadání platí:

$$a = 4,\ abc = 140,\ bcd = 280,\ cde = 560,\ e = 10.$$

Z druhé a třetí rovnosti plyne, že $2abc = bcd$, tzn. $d = 2a = 8$. Odtud a z posledních dvou rovností dostáváme $c = 560 : (8 \cdot 10) = 7$. Cilce je tedy 7 roků.

Poznámka. S uvedenými vztahy lze samozřejmě manipulovat různě. Např. z první a druhé rovnosti plyne, že $bc = 140 : 4 = 35$. Ze třetí rovnosti potom plyne, že $d = 280 : 35 = 8$. Odtud a z posledních dvou rovností dostáváme $c = 560 : (8 \cdot 10) = 7$.

Z7–I–2

K babičce přijeli na prázdniny vnuci — pět různě starých bratrů. Babička jim řekla, že pro ně má celkem 600 Kč jako kapesné, jež si mají rozdělit tak, aby:

- nejstarší dostal nejvíc,
- každý mladší dostal o určitou částku méně než jeho starší věkově nejbližší sourozenec,
- tato částka byla stále stejná,
- nejmladší dostal částku, kterou lze vyplatit v desetikorunách a která není menší než 50 Kč, ale není větší než 80 Kč.

Určete všechny možnosti, jak si mohli vnuci kapesné rozdělit. (*M. Volfová*)

Nápověda. Zvolte vhodně neznámé a pomocí nich vyjádřete částky pro jednotlivé vnuky.

Možné řešení. Nejmladší sourozenec může dostat

$$50,\ 60,\ 70,\ \text{nebo } 80; \tag{1}$$

tuto hodnotu označíme p (Kč psát nebudeme). Druhý nejmladší sourozenec dostane více než nejmladší o částku, kterou označíme o. Prostřední sourozenec tak dostane o $2o$ více než nejmladší atd. To znamená, že sourozenci postupně dostanou

$$p,\ p + o,\ p + 2o,\ p + 3o,\ p + 4o. \tag{2}$$

Celkem si takto rozdělí $5p + 10o$, což má být 600.

Pokud je $p = 50$, pak $5p = 250$ a $10o$ musí být $600 - 250 = 350$. Odtud plyne, že $o = 35$. Vnuci si v tomto případě peníze rozdělili následovně (řazeno od nejmladšího):

$$50,\ 85,\ 120,\ 155,\ 190.$$

Podobně lze určit všechny zbývající možnosti:

p	o	odpověď
50	35	50, 85, 120, 155, 190
60	30	60, 90, 120, 150, 180
70	25	70, 95, 120, 145, 170
80	20	80, 100, 120, 140, 160

Poznámka. Není náhodou, že prostřední sourozenec dostane v každém případě stejnou částku. Toho si lze všimnout hned na začátku, protože sourozenců je lichý počet a rozdíl mezi sousedními částkami je stále stejný.

Pokud bychom částku, kterou má dostat prostřední vnuk, označili s, pak místo (2) píšeme

$$s - 2o,\ s - o,\ s,\ s + o,\ s + 2o.$$

Součet všech těchto částek je $5s$, a to má být 600. Odtud plyne, že $s = 120$. Všechna možná rozdělení kapesného lze určit tak, že zjistíme, pro která o je $120 - 2o$ některé z čísel (1)...

Z7–I–3

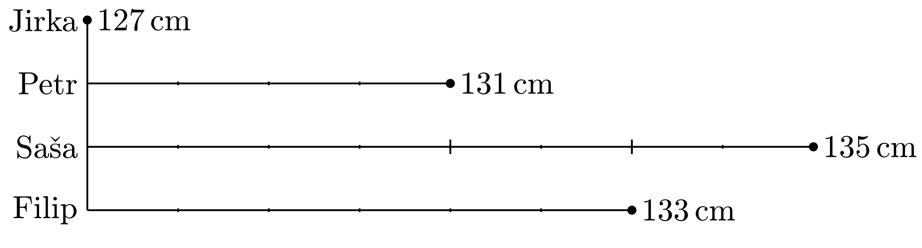
Jirka, Míša, Petr, Filip a Saša skákali do dálky. Saša skočil 135 cm, Petr skočil o 4 cm více než Jirka a Míša o 7 cm méně než Filip. Navíc Filipův skok byl přesně v polovině mezi tím Petrovým a Sašovým a nejkratší skok měřil 127 cm.

Zjistěte, kolik cm skočili jednotliví chlapci. (*M. Dillingerová*)

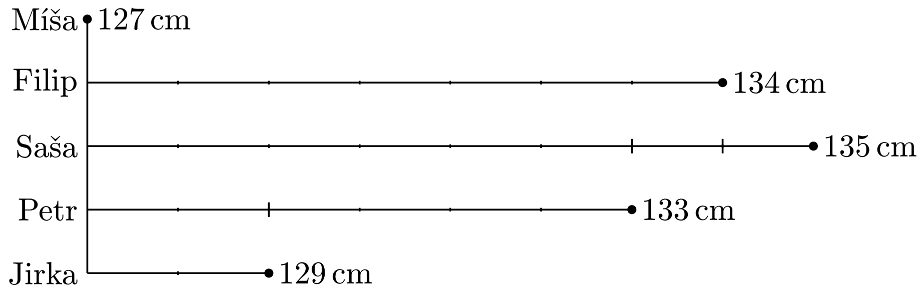
Nápověda. Čí skok byl nejkratší?

Možné řešení. Nejprve určíme, čí skok měřil 127 cm. Určitě to nebyl skok Sašův (ten skočil 135 cm), ani Petrův (skočil víc než Jirka), ani Filipův (skočil víc než Míša). Jsou tedy dvě možnosti: Nejméně skočil Jirka nebo Míša.

Nejprve prověříme možnost, že nejméně skočil Jirka: V takovém případě by Petr skočil 131 cm ($127 + 4 = 131$). Protože Filipův skok byl přesně v polovině mezi Petrovým a Sašovým skokem, musel by měřit 133 cm ($135 - 133 = 133 - 131 = 2$). Pak by Míša skočil 126 cm ($133 - 7 = 126$), což ale není možné, protože by to bylo méně než Jirkův nejkratší skok.



Musela tedy nastat druhá situace, a sice, že nejméně skočil Míša: Potom Filip skočil 134 cm ($127 + 7 = 134$). Odtud plyne, že Petr skočil 133 cm ($135 - 134 = 1 = 134 - 133$). A konečně Jirka skočil 129 cm ($133 - 4 = 129$).



Z7–I–4

V hostinci U Tří prasátek obsluhují Pašík, Rašík a Sašík. Pašík je nečestný, takže každému hostovi připočítá k celkové ceně 6 krejcarů. Rašík je poctivec, každému vyúčtuje přesně to, co snědl a vypil. Sašík je dobrák, takže každému hostovi dá slevu z celkové útraty ve výši 20 %. Prasátka si jsou tak podobná, že žádný host nepozná, které zrovna obsluhuje.

Koza Líza zašla v pondělí, v úterý i ve středu do tohoto hostince na borůvkový knedlík. Přestože věděla, že v pondělí byl Rašík nemocný a neobsluhoval, utratila za svůj pondělní, úterní i středeční knedlík dohromady stejně, jako kdyby ji vždy obsluhoval Rašík.

Kolik krejcarů účtuje Rašík za jeden borůvkový knedlík? Najděte všechny možnosti. (Ceny uváděné v jídelním lístku se v tyto dny neměnily.) (*M. Petrová*)

Nápověda. Která dvě prasátka určitě kozu Lízu obsluhovala?

Možné řešení. Aby celková třídenní Lízina útrata byla stejná, musel některý den obsluhovat Sašík (účtoval si méně, než skutečně měla zaplatit) a některý den Pašík (účtoval si více, než skutečně měla zaplatit). Zbývající třetí den mohlo obsluhovat kterékoliv ze tří prasátek (nevíme o tom, že by Rašík byl nemocný i v dalších dnech). Postupně probereme všechny tři možnosti:

1. Obsluhoval jednou Sašík, jednou Pašík a jednou Rašík: To znamená, že 6 krejcarů, které Líza zaplatila Pašíkovi navíc, představuje slevu 20 %, kterou dostala od Sašíka. Pětina ceny knedlíku je tedy 6 krejcarů, což znamená, že Rašík by v tomto případě účtoval $5 \cdot 6 = 30$ krejcarů.
2. Obsluhoval jednou Sašík a dvakrát Pašík: Pašíkovi Líza zaplatila navíc $2 \cdot 6 = 12$ krejcarů. Těchto 12 krejcarů je zároveň 20% sleva, kterou dostala od Sašíka. Rašík by tedy za knedlík v tomto případě účtoval $5 \cdot 12 = 60$ krejcarů.
3. Obsluhoval dvakrát Sašík a jednou Pašík: Líza dostala dvakrát 20% slevu z téže částky. To je stejné, jako kdyby jednou zaplatila plnou částku a jednou dostala slevu 40 %. Tato sleva odpovídá 6 krejcarům, které zaplatila navíc Pašíkovi. Dvě pětiny Rašíkovy ceny je 6 krejcarů, pětina jsou tedy 3 krejcary. Rašík by si v tomto případě účtoval $5 \cdot 3 = 15$ krejcarů.

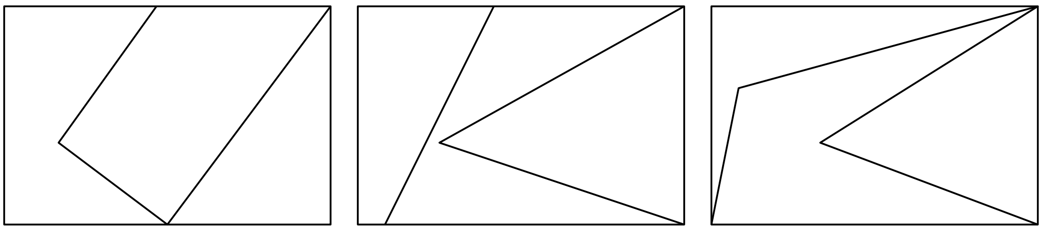
Rašík za jeden borůvkový knedlík účtuje 15, 30, nebo 60 krejcarů.

Z7–I–5

Maminka dělí čokoládu, která má 6×4 shodných dílků, svým třem dětem. Jak může maminka čokoládu rozdělit na právě tři části se stejným obsahem tak, aby jeden útvar byl trojúhelník, jeden čtyřúhelník a jeden pětiúhelník? (*E. Novotná*)

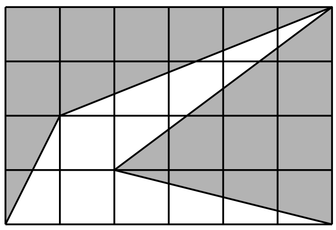
Nápověda. Zkuste nejprve rozdělit obdélník na požadované útvary bez podmínky rovnosti obsahů. Poté pozměňte svoje dělení tak, aby obsahy útvarů byly stejné.

Možné řešení. Rozdělíme obdélník na požadované útvary, zatím bez ohledu na rovnost obsahů. Zde je několik možností:

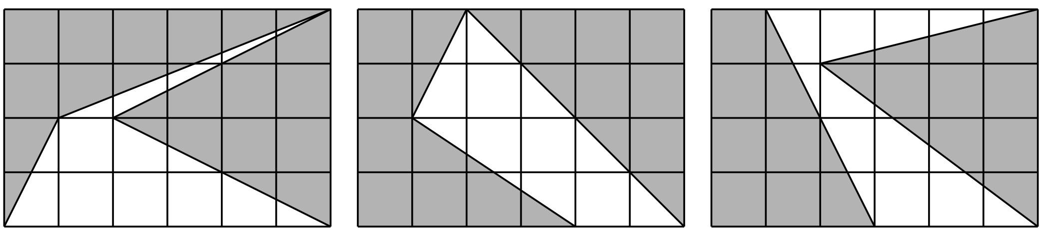


Nyní zkusíme modifikovat dělení tak, aby obsahy útvarů byly stejné. Celý obdélník sestává z 24 dílků, proto každý ze tří útvarů musí mít obsah $24 : 3 = 8$ dílků. Při pozměňování útvarů stačí zajistit, aby dva z těchto útvarů měly obsah 8 dílků, obsah třetího pak bude nutně stejný.

Na ukázku upřesníme třetí z výše uvedených dělení — všechny vrcholy uvažujeme v uzlových bodech:



Obsah čtyřúhelníku je právě $1 + 2 + 5 = 8$ dílků. Trojúhelník má zřejmě tentýž obsah, našli jsme tedy jedno z mnoha možných řešení. Pro inspiraci uvádíme několik dalších:



Poznámka. Uvedená řešení využívají pouze uzlové body sítě, což však není nutné. Existují samozřejmě řešení, kdy odpovídající vrcholy nejsou v uzlových bodech. V takových případech však může být zdůvodnění rovnosti obsahů komplikovanější.

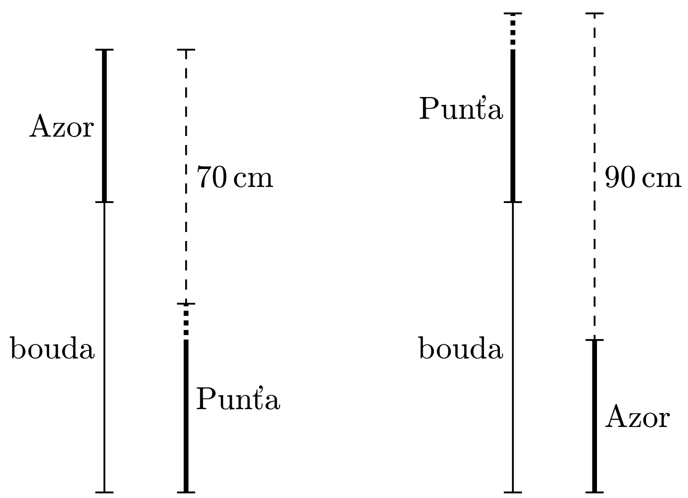
Z7–I–6

Když Azor stojí na psí boudě a Punťa na zemi, je Azor o 70 cm vyšší než Punťa. Když Punťa stojí na psí boudě a Azor na zemi, je Punťa o 90 cm vyšší než Azor. Jak vysoká je psí bouda? (*L. Hozová*)

Nápověda. Určete, který ze psů je větší a o kolik.

Možné řešení. Kdyby byl Azor stejně velký jako Punťa, byly by obě hodnoty v zadání stejné. Rozdíl mezi naměřenými hodnotami je $90 - 70 = 20$ (cm), což znamená, že jeden ze psů je o 10 cm větší než druhý. Větší hodnota odpovídá situaci, kdy Punťa stojí na boudě, což znamená, že Punťa je o 10 cm větší než Azor.

Azor na psí boudě je o 70 cm vyšší než Punťa a Punťa je o 10 cm vyšší než Azor. Tedy Azor na psí boudě je o 80 cm vyšší než samotný Azor; bouda je vysoká 80 cm.



Jiné řešení. Azor na boudě je o 70 cm vyšší než Punťa na zemi a Punťa na boudě je o 90 cm vyšší než Azor na zemi. Kdybychom na Azora stojícího na boudě postavili ještě další stejně vysokou boudu a na ní Punťu, bude tato sestava o $70 + 90 = 160$ (cm) vyšší než kdyby stál Azor na Punťovi. To znamená, že dvě boudy jsou vysoké 160 cm, bouda je tedy vysoká 80 cm.

Poznámka. Výšku psí boudy označíme b, výšku Azora označíme a a výšku Punti označíme p (vše v cm). Informace ze zadání při tomto značení zapíšeme takto:

$$\begin{aligned} b + a &= p + 70, \\ b + p &= a + 90. \end{aligned}$$

Uvedená řešení pak lze interpretovat následovně.

Výškový rozdíl Punti a Azora je možné určit odečtením obou rovnic:

$$\begin{aligned} p - a &= a - p + 20, \\ 2(p - a) &= 20, \\ p - a &= 10. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že $p = a + 10$ a z první rovnice pak dostáváme $b = 10 + 70 = 80$.

Naopak sečtením obou rovnic dostaneme:

$$\begin{aligned} 2b + a + p &= a + p + 160, \\ 2b &= 160, \\ b &= 80. \end{aligned}$$

I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Na okružní lince ve městě jede tramvaj, v níž je 300 cestujících. Na každé zastávce se odehraje jedna z následujících situací:

- pokud je v tramvaji aspoň 7 cestujících, tak jich 7 vystoupí,
- pokud je v tramvaji méně než 7 cestujících, tak 5 nových cestujících přistoupí.

Vysvětlete, proč v jistý okamžik v tramvaji nezůstane žádný cestující. Poté zjistěte, kolik by mělo být na začátku v tramvaji cestujících, aby se tramvaj nikdy nevyprázdnila.
(*J. Mazák*)

Nápověda. Zkuste uvažovat menší počty cestujících.

Možné řešení. Nějakou dobu budou cestující z tramvaje jenom vystupovat. Po 42 zastaveních zůstane v tramvaji $300-42\cdot7=6$ lidí. Podle uvedených pravidel se počet cestujících bude dál vyvíjet následovně:

$$\ldots 6,\ 11,\ 4,\ 9,\ 2,\ 7,\ 0.$$

V tramvaji tedy nezůstane žádný cestující.

Nyní si představme obecnou situaci, kdy je v tramvaji neznámý počet lidí. Tito budou postupně vystupovat, dokud jich nebude v tramvaji méně než 7. To znamená, že bez ohledu na to, kolik lidí bylo v tramvaji na začátku, časem bude jejich počet roven některému z čísel 0, 1, 2, 3, 4, 5 nebo 6. Stačí tedy diskutovat jenom tyto možnosti.

V předchozím odstavci jsme zjistili, že pokud v tramvaji zůstane 6, 4, nebo 2 cestujících, tak se tramvaj nakonec vyprázdní. Když v tramvaji zůstane 5 cestujících, pak se jejich počet bude dál měnit takto:

$$\ldots,\ 5,\ 10,\ 3,\ 8,\ 1,\ 6,\ \ldots$$

Tuto situaci již známe; tramvaj se nakonec vyprázdní. V posloupnosti se objevují také čísla 3 a 1, čímž jsme vyčerpali všechny možnosti. Bez ohledu na počáteční počet cestujících se tramvaj nakonec vždycky vyprázdní.

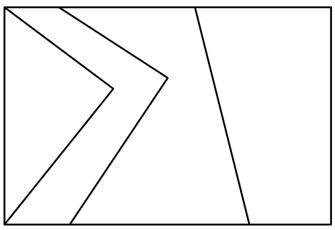
Poznámka. Zkuste si rozmyslet, jak řešení úlohy ovlivňují čísla 7 a 5 ze zadání. Vyprázdnila by se tramvaj vždy také pro jinou dvojici čísel?

Z8–I–2

Maminka dělí čokoládu, která má 6×4 shodných dílků, svým čtyřem dětem. Jak může maminka čokoládu rozdělit na právě čtyři části se stejným obsahem tak, aby jeden útvar byl trojúhelník, jeden čtyřúhelník, jeden pětiúhelník a jeden šestiúhelník? (*E. Novotná*)

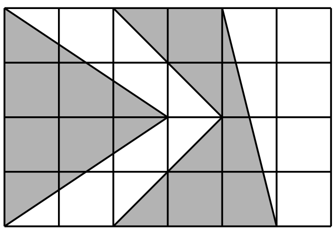
Nápověda. Zkuste nejprve rozdělit obdélník na požadované útvary bez podmínky rovnosti obsahů. Poté pozměňte svoje dělení tak, aby obsahy útvarů byly stejné.

Možné řešení. Rozdělíme obdélník na požadované útvary, zatím bez ohledu na rovnost obsahů. Zde jedna z možností:

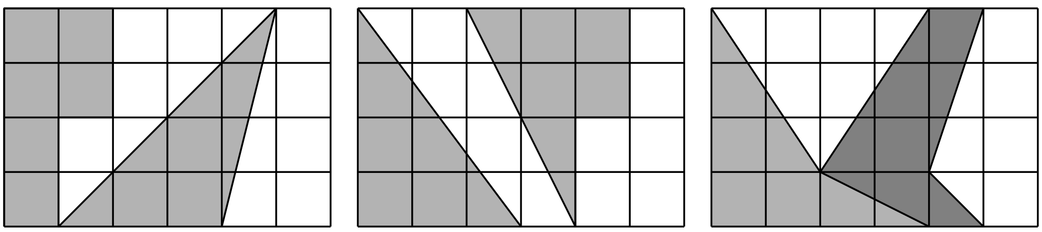


Nyní zkusíme modifikovat dělení tak, aby obsahy útvarů byly stejné. Celý obdélník sestává z 24 dílků, proto každý ze čtyř útvarů musí mít obsah $24 : 4 = 6$ dílků. Při pozměňování útvarů stačí zajistit, aby tři z těchto útvarů měly obsah 6 dílků, obsah čtvrtého pak bude nutně stejný.

Upřesnění výše uvedeného dělení může být následující — všechny vrcholy uvažujeme v uzlových bodech:



Trojúhelník i čtyřúhelník zřejmě mají obsah 6 dílků. Obsah pětiúhelníku je $2+2+2 = 6$ dílků. Našli jsme tedy jedno z mnoha možných řešení. Pro inspiraci uvádíme několik dalších:



Poznámka. Uvedená řešení využívají pouze uzlové body sítě, což však není nutné. Existují řešení, kdy odpovídající vrcholy nejsou v uzlových bodech. V takových případech však může být zdůvodnění rovnosti obsahů komplikovanější.

Z8–I–3

Změňte v každém ze tří čísel jednu číslici tak, aby byl příklad na odčítání bez chyby:

$$\begin{array}{r} 7\,2\,4 \\ -\,3\,0\,7 \\ \hline 1\,8\,8 \end{array}$$

Najděte všechna řešení. (*M. Petrová*)

Nápověda. Je možné odčítání v řádu desítek opravit jen změnou číslic v řádu jednotek?

Možné řešení. Příklad není správně, a to ani v řádu jednotek. Když si prohlédneme odčítání v řádu desítek a v řádu stovek, zjistíme, že chyba je v obou rozdílech větší než 1. To znamená, že takový rozdíl není možné opravit jen změnou číslic o řád níž. Máme-li provést tři změny, musí být v každém sloupci právě jedna. Proto stačí, když budeme diskutovat následujících šest možností:

$$\begin{array}{r} 7\,2\,* \\ -\,3\,*\,7 \\ \hline *\,8\,8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7\,2\,* \\ -\,*\,0\,7 \\ \hline 1\,*\,8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7\,*\,4 \\ -\,3\,0\,* \\ \hline *\,8\,8 \end{array} \quad \begin{array}{r} *\,2\,4 \\ -\,3\,0\,* \\ \hline 1\,*\,8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7\,*\,4 \\ -\,*\,0\,7 \\ \hline 1\,8\,* \end{array} \quad \begin{array}{r} *\,2\,4 \\ -\,3\,*\,7 \\ \hline 1\,8\,* \end{array}$$

Pro každou z těchto možností postupně odzadu doplníme správné číslice. Např. v prvním případě můžeme postupovat následovně:

- správná číslice na místě jednotek musí být 5, protože jedině $1\mathbf{5} - 7 = 8$ (v řádu desítek připočteme 1),
- správná číslice na místě desítek musí být 3, protože jedině $12 - \mathbf{3} - 1 = 8$ (v řádu stovek připočteme 1),
- správná číslice na místě stovek musí být 3, protože $7 - 3 - 1 = \mathbf{3}$.

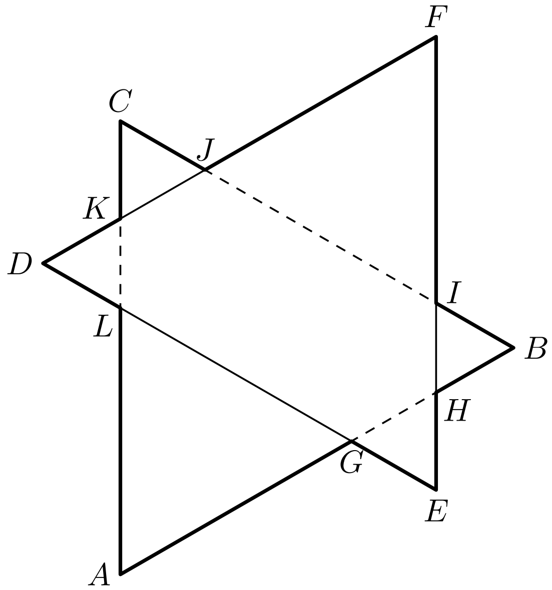
Podobným způsobem probereme ostatní možnosti. Úloha má celkem šest řešení:

$$\begin{array}{r} 7\,2\,\mathbf{5} \\ -\,3\,\mathbf{3}\,7 \\ \hline \mathbf{3}\,8\,8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7\,2\,\mathbf{5} \\ -\,\mathbf{6}\,0\,7 \\ \hline 1\,\mathbf{1}\,8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7\,\mathbf{9}\,4 \\ -\,3\,0\,\mathbf{6} \\ \hline \mathbf{4}\,8\,8 \end{array} \quad \begin{array}{r} \mathbf{4}\,2\,4 \\ -\,3\,0\,\mathbf{6} \\ \hline 1\,\mathbf{1}\,8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7\,\mathbf{9}\,4 \\ -\,\mathbf{6}\,0\,7 \\ \hline 1\,8\,\mathbf{7} \end{array} \quad \begin{array}{r} \mathbf{5}\,2\,4 \\ -\,3\,\mathbf{3}\,7 \\ \hline 1\,8\,\mathbf{7} \end{array}$$

Poznámka. Úvodní postřeh není úplně samozřejmý, ale při systematickém postupu by na něj měl časem přijít každý. Uvědomte si, že bez tohoto poznatku by diskuze musela zahrnovat celkem $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ možností.

Z8–I–4

Trojúhelníky ABC a DEF jsou rovnostranné s délkou strany 5 cm. Tyto trojúhelníky jsou položeny přes sebe tak, aby strany jednoho trojúhelníku byly rovnoběžné se stranami druhého a aby průnikem těchto dvou trojúhelníků byl šestiúhelník (na obrázku označený jako $GHIJKL$).



Je možné určit obvod dvanáctiúhelníku $AGEHBIFJCKDL$, aniž bychom znali přesnější informace o poloze trojúhelníků? Pokud ano, spočítejte jej; pokud ne, vysvětlete proč.

(*E. Patáková*)

Nápověda. Kolik je na obrázku rovnostranných trojúhelníků? Zkuste je nějak využít.

Možné řešení. Na obrázku je celkem 8 rovnostranných trojúhelníků: dva velké (ABC, DEF) a šest malých (LAG, GEH, HBI, IFJ, JCK, KDL). Velké trojúhelníky jsou tak přímo zadány. Zdůvodnění, že malé trojúhelníky jsou rovnostranné, ukážeme pouze pro trojúhelník LAG: Úhel u vrcholu A má velikost $60°$, protože je vnitřním úhlem rovnostranného trojúhelníku ABC. Přímky LG a CB jsou podle zadání rovnoběžné, úhly ALG a ACB jsou tedy souhlasné. Oba tyto úhly mají velikost $60°$, protože úhel ACB je vnitřním úhlem v rovnostranném trojúhelníku ABC. Dva ze tří vnitřních úhlů v trojúhelníku LAG mají velikost $60°$, proto je tento trojúhelník rovnostranný.

Obvod dvanáctiúhelníku můžeme vyjádřit jako obvod dvou velkých trojúhelníků zmenšený o obvod šestiúhelníku $GHIJKL$. Z rovnostrannosti malých trojúhelníků plyne, že úsečky GL a AL, KJ a KC jsou po dvojicích shodné. Délka lomené čáry $GLKJ$ je tedy stejná jako délka úsečky AC, tj. 5 cm. Podobně odvodíme, že i délka lomené čáry $JIHG$ je 5 cm. Odtud známe obvod šestiúhelníku $GHIJKL$; obvod dvanáctiúhelníku $AGEHBIFJCKDL$ je proto roven

$$6 \cdot 5 - 2 \cdot 5 = 20\,(\text{cm}),$$

a to bez ohledu na vzájemnou polohu velkých trojúhelníků, která vyhovuje zadání.

Jiné řešení. Dvanáctiúhelník $AGEHBIFJCKDL$ je tvořen stranami šesti malých trojúhelníků, přičemž z každého malého trojúhelníku se takto uplatní dvě z jeho tří stran. Všechny tyto trojúhelníky jsou rovnostranné, proto je obvod dvanáctiúhelníku roven $\frac{2}{3}$ součtu obvodů malých trojúhelníků. Součet obvodů šesti malých trojúhelníků je však stejný jako součet obvodů dvou velkých trojúhelníků; obvod dvanáctiúhelníku $AGEHBIFJCKDL$ je proto roven

$$\frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 5 = 20\,(\mathrm{cm}),$$

a to bez ohledu na vzájemnou polohu velkých trojúhelníků, která vyhovuje zadání.

Poznámky. Předchozí úvahy je možné zjednodušit objevem, že malé trojúhelníky jsou po dvojicích shodné (LAG a IFJ, GEH a JCK, HBI a KDL). Tento poznatek je však nutné zdůvodnit, což ukážeme pro trojúhelníky LAG a IFJ: V úvodu jsme zdůvodnili, že oba trojúhelníky jsou rovnostranné. Přitom výška obou trojúhelníků je stejná — je to výška rovnostranného trojúhelníku o straně 5 cm zmenšená o vzdálenost rovnoběžek IJ a GL. Tyto trojúhelníky jsou tedy skutečně shodné.

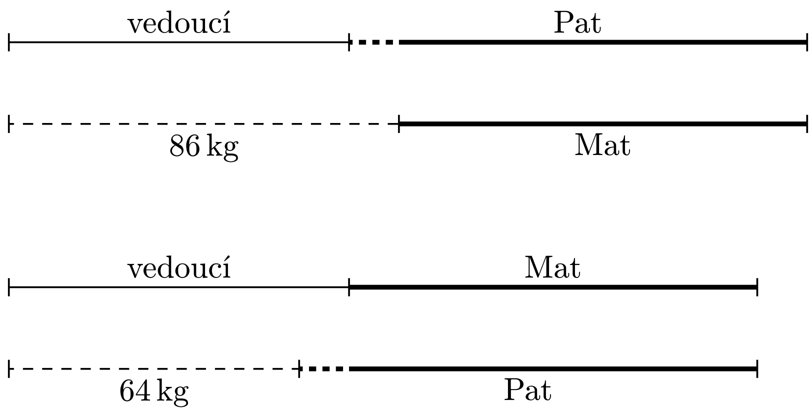
Z8–I–5

Zákazník vyvážející odpad do sběrného dvora je povinen zastavit naloženým autem na váze a po vykládce odpadu znovu. Rozdíl naměřených hmotností tak odpovídá vyvezenému odpadu. Pat a Mat chybovali. Při vážení naloženého auta se na váhu připletl Pat a při vážení vyloženého auta se tam místo Pata nachomýtl Mat. Vedoucí dvora si tak zaznamenal rozdíl 332 kg. Poté se na prázdnou váhu postavili společně vedoucí a Pat, posléze samotný Mat a váha ukázala rozdíl 86 kg. Dále se spolu zvážili vedoucí a Mat, poté samotný Pat a váha ukázala rozdíl 64 kg.

Kolik vážil vyvezený odpad ve skutečnosti? (*L. Šimůnek*)

Nápověda. Zkuste si hmotnosti a jejich rozdíly znázornit graficky.

Možné řešení. Z rozdílů změřených při vážení s vedoucím plyne, že Pat je těžší než Mat. Hmotnosti při těchto váženích znázorníme graficky:



Rozdíl hmotnosti Pata a Mata je zvýrazněn tlustou čárkovanou čárou. Na schématu vidíme, že dvojnásobek tohoto rozdílu je roven $86 - 64 = 22\,(\mathrm{kg})$. Pat je tedy o 11 kg těžší než Mat. Při vážení odpadu Pat postavením na váhu zvětšil měřený rozdíl, Mat jej postavením na váhu zmenšil. Naměřená hodnota je tedy o tolik větší než hmotnost odpadu, o kolik je Pat těžší než Mat. Skutečná hmotnost odpadu je $332 - 11 = 321$ (kg).

Jiné řešení. Hmotnosti Pata, Mata, vedoucího a odpadu označme po řadě p, m, v, x. Při prvním vážení bylo na váze auto, odpad a Pat, při druhém vážení auto a Mat. Rozdíl změřených hmotností lze tedy vyjádřit:

$$x + p - m = 332. \tag{1}$$

Další dva rozdíly změřených hmotností vyjádříme obdobně:

$$v + p - m = 86, \tag{2}$$
$$v + m - p = 64. \tag{3}$$

Odečtením rovnic (2) a (3) dostaneme:

$$\begin{aligned} 2(p - m) &= 86 - 64, \\ p - m &= 11. \end{aligned}$$

Dosazením tohoto rozdílu do rovnice (1) dostaneme:

$$\begin{aligned} x + 11 &= 332, \\ x &= 321. \end{aligned}$$

Hmotnost vyvezeného odpadu je 321 kg.

Poznámka. Všimněte si, že hmotnost vedoucího lze určit na rozdíl od hmotnosti Pata či Mata jednoznačně: např. sečtením rovnic (2) a (3) dostaneme $2v = 86 + 64 = 150$, tedy $v = 75$ (kg).

Z8–I–6

V domě máme mezi dvěma patry dvě různá schodiště. Na každém z těchto schodišť jsou všechny schody stejně vysoké. Jedno ze schodišť má každý schod vysoký 10 cm, druhé má o 11 schodů méně než to první. Během dne jsem šel pětkrát nahoru a pětkrát dolů, přičemž jsem si mezi těmito dvěma schodišti vybíral náhodně. Celkem jsem na každém ze schodišť zdolal stejný počet schodů.

Jaký je výškový rozdíl mezi patry? (*M. Mach*)

Nápověda. Nejdřív určete, kolikrát jsem mohl jít po jednotlivých schodištích.

Možné řešení. Protože druhé schodiště má méně schodů než první, musel jsem po něm jít víckrát než po prvním. Během dne jsem tedy po schodištích mohl jít takto:

- 1krát po prvním a 9krát po druhém,
- 2krát po prvním a 8krát po druhém,
- 3krát po prvním a 7krát po druhém,
- 4krát po prvním a 6krát po druhém.

Označíme počet schodů na prvním schodišti x, na druhém schodišti jich je $x-11$. Na každém ze schodišť jsem celkem zdolal stejný počet schodů. Tato podmínka dává pro každou z výše uvedených možností rovnici s neznámou x, kterou vyřešíme. V prvním případě dostáváme:

$$\begin{aligned} x &= 9x - 99,\\ 8x &= 99,\\ x &= \frac{99}{8}. \end{aligned}$$

Počet schodů je přirozené číslo, tudíž tento případ nastat nemohl. Ve druhém případě dostáváme rovnici

$$2x = 8x - 88,$$

jejímž řešením je $x = \frac{88}{6}$, takže tato možnost také nevyhovuje. Ve třetím případě dostáváme

$$3x = 7x - 77,$$

s řešením $x = \frac{77}{4}$, což je opět nevyhovující. Ve čtvrtém případě dostáváme

$$4x = 6x - 66,$$

s řešením $x = \frac{66}{2} = 33$, což je jediná vyhovující možnost.

První schodiště má 33 schodů, každý schod je vysoký 10 cm, výškový rozdíl mezi patry je 3,3 m.

Poznámka. Pokud uvažujeme, že po prvním schodišti jsem šel během dne celkem a-krát a po druhém celkem b-krát, potom předchozí požadavky můžeme formulovat takto:

$$a + b = 10 \text{ a } ax = bx - 11b.$$

Ze druhé rovnice vyjádříme x:

$$x = \frac{11b}{b-a}.$$

Aby x bylo kladné, musí být $b > a$, což spolu s podmínkou $a + b = 10$ dává právě čtyři možnosti uvedené výše. Aby x bylo přirozené číslo, musí být $11b$ dělitelné $b - a$. Protože 11 je prvočíslo a $b - a$ nemůže být ani 11, ani 1, musí být b dělitelné $b - a$. Z uvedených čtyř možností této podmínce vyhovuje pouze dvojice $a = 4$ a $b = 6$.

I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Petr si myslí dvojmístné číslo. Když tohle číslo napíše dvakrát za sebou, vznikne čtyřmístné číslo, které je dělitelné devíti. Když totéž číslo napíše třikrát za sebou, vznikne šestimístné číslo, které je dělitelné osmi. Zjistěte, jaké číslo si může Petr myslet.

(*E. Novotná*)

Nápověda. Jak se zadané informace o dělitelnosti projeví v dělitelnosti hledaného dvojmístného čísla?

Možné řešení. Číslo, které vzniklo dvojnásobným zápisem myšleného čísla, je podle zadání dělitelné devíti, proto musí být také jeho ciferný součet dělitelný devíti. Avšak ciferný součet takto vzniklého čísla je dvojnásobkem ciferného součtu myšleného čísla. Proto je ciferný součet myšleného čísla nutně dělitelný devíti.

Pokud číslo vzniklé trojnásobným zápisem myšleného čísla je dělitelné osmi, musí být dělitelné i čtyřmi. Jeho poslední dvojčíslí tedy musí být dělitelné čtyřmi a tímto dvojčíslím je právě myšlené číslo.

Zjistili jsme, že Petrovo myšlené číslo je dělitelné devíti a současně čtyřmi, je tedy dělitelné 36. Jediná dvojmístná čísla dělitelná 36 jsou 36 a 72. Ověřme, která z těchto dvou možností vyhovuje podmínce v zadání o dělitelnosti osmi:

- 363636 není dělitelné 8,
- 727272 je dělitelné 8.

Petr si může myslet jedině číslo 72.

Poznámka. V řešení používáme tato dobře známá kritéria o dělitelnosti:

- číslo je dělitelné čtyřmi, právě když jeho poslední dvojčíslí je dělitelné čtyřmi,
- číslo je dělitelné osmi, právě když jeho poslední trojčíslí je dělitelné osmi,
- číslo je dělitelné devíti, právě když jeho ciferný součet je dělitelný devíti.

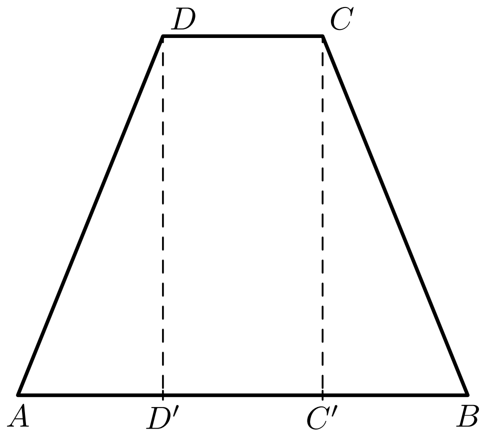
Z9–I–2

Je dán rovnoramenný lichoběžník s délkami stran $|AB| = 31\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 26\,\mathrm{cm}$ a $|CD| = 11\,\mathrm{cm}$. Na straně AB je bod E určený poměrem vzdáleností $|AE| : |EB| = 3 : 28$. Vypočítejte obvod trojúhelníku CDE.

(*L. Dedková*)

Nápověda. Použijte opakovaně Pythagorovu větu.

Možné řešení. Patu kolmice na stranu AB z bodu C, resp. D označíme C', resp. D'.



Protože je $ABCD$ lichoběžník, platí $|C'D'| = |CD| = 11\,\text{cm}$, a protože je navíc rovnoramenný, tak

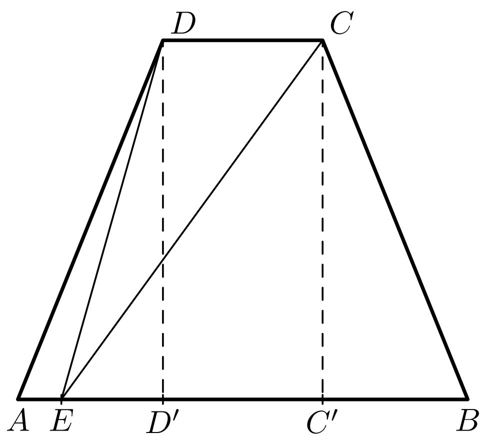
$$|AD'| = |BC'| = \frac{|AB| - |C'D'|}{2} = \frac{31 - 11}{2} = 10\,(\text{cm}).$$

Pomocí Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku $BC'C$ (který je shodný s trojúhelníkem $AD'D$) vypočteme výšku lichoběžníku:

$$|CC'| = |DD'| = \sqrt{|BC|^2 - |BC'|^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24\,(\text{cm}).$$

Na straně AB je určen bod E tak, že $|AE| : |EB| = 3 : 28$. Protože $3 + 28 = 31$ a $|AB| = 31\,\text{cm}$, je $|AE| = 3\,\text{cm}$ a $|EB| = 28\,\text{cm}$. Odtud vyvozujeme, že

$$|ED'| = |AD'| - |AE| = 10 - 3 = 7\,(\text{cm}),$$
$$|EC'| = |EB| - |BC'| = 28 - 10 = 18\,(\text{cm}).$$



Pomocí Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku $ED'D$, resp. $EC'C$ vypočteme délku strany ED, resp. EC:

$$|ED| = \sqrt{|ED'|^2 + |DD'|^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25\,(\text{cm}),$$
$$|EC| = \sqrt{|EC'|^2 + |CC'|^2} = \sqrt{18^2 + 24^2} = 30\,(\text{cm}).$$

Nyní můžeme vypočítat obvod trojúhelníku CDE:

$$o = |CD| + |DE| + |EC| = 11 + 25 + 30 = 66\,(\mathrm{cm}).$$

Z9–I–3

Podlahu tvaru obdélníku o stranách 360 cm a 540 cm máme pokrýt (beze spár) shodnými čtvercovými dlaždicemi. Můžeme si vybrat ze dvou typů čtvercových dlaždic, jejichž strany jsou v poměru 2 : 3. V obou případech lze pokrýt celou plochu jedním typem dlaždic bez řezání. Menších dlaždic bychom potřebovali o 30 více než větších.

Určete, jak dlouhé jsou strany dlaždic. (*K. Pazourek*)

Nápověda. Vyjádřete počet použitých dlaždic v závislosti na délce jejich strany.

Možné řešení. Označme m délku strany malé dlaždice a v délku strany velké dlaždice (v cm). Jestliže pokryjeme podlahu menšími dlaždicemi, ke kratší straně jich pak bude přiléhat $\frac{360}{m}$ a k delší straně $\frac{540}{m}$, celkem jich tedy bude $\frac{360}{m} \cdot \frac{540}{m}$. Podobně celkový počet větších dlaždic bude $\frac{360}{v} \cdot \frac{540}{v}$. Podle zadání pak musí platit

$$\frac{360}{m} \cdot \frac{540}{m} = \frac{360}{v} \cdot \frac{540}{v} + 30. \tag{1}$$

Protože $m : v = 2 : 3$, můžeme psát $m = 2x$ a $v = 3x$ pro novou neznámou x. Dosazením do předchozí rovnice a dalšími úpravami dostáváme:

$$\begin{aligned}
\frac{180}{x} \cdot \frac{270}{x} &= \frac{120}{x} \cdot \frac{180}{x} + 30,\\
180 \cdot 270 &= 120 \cdot 180 + 30x^2,\\
180 \cdot 150 &= 30x^2,\\
900 &= x^2.
\end{aligned}$$

Čísla m, v a x jsou kladná, tedy $x = 30$ a $m = 60$, $v = 90\,(\mathrm{cm})$.

Strany dlaždic jsou dlouhé 60 cm a 90 cm.

Jiná nápověda. Určete přímo ze zadaného poměru 2 : 3 poměr počtů jednotlivých dlaždic.

Jiné řešení. Protože poměr délek stran dlaždic je 2 : 3, poměr jejich obsahů je 4 : 9. Označíme p_m počet malých dlaždic a p_v počet velkých dlaždic. Protože oba typy dlaždic pokryjí celý obdélník, musí platit

$$p_m : p_v = 9 : 4. \tag{2}$$

Ze zadání plyne, že $p_m = p_v + 30$, což spolu s předchozím poměrem dává:

$$\begin{aligned}
\frac{9}{4}p_v &= p_v + 30,\\
\frac{5}{4}p_v &= 30,\\
p_v &= 24.
\end{aligned}$$

Abychom uměli určit délku strany velké dlaždice, musíme zjistit, jak tyto dlaždice pokrývají obdélníkovou podlahu. Délky stran obdélníku jsou v poměru $360 : 540 = 2 : 3$, ve stejném poměru musí být i počty dlaždic přiléhajících k odpovídajícím stranám. Ze všech možných rozkladů celkového počtu velkých dlaždic,

$$24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6,$$

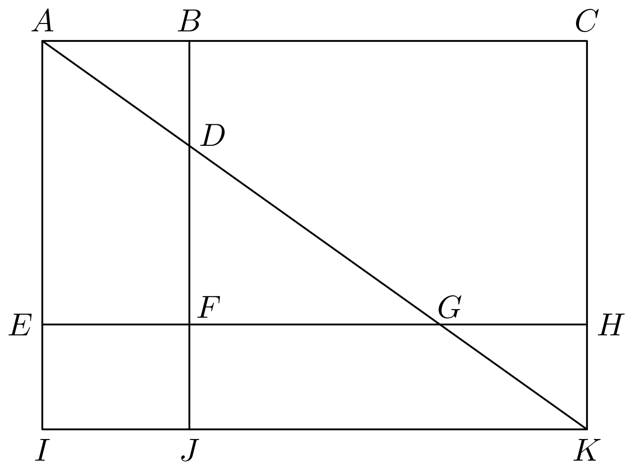
této podmínce vyhovuje právě poslední rozklad. Délka strany velké dlaždice je tak $\frac{360}{4} = \frac{540}{6} = 90\,(\mathrm{cm})$. Délka strany malé dlaždice je pak $\frac{2}{3} \cdot 90 = 60\,(\mathrm{cm})$.

Poznámky. Pokud v prvním řešení místo pomocné neznámé x vyjádříme např. $m = \frac{2}{3}v$, potom po dosazení do (1) dostáváme rovnici s neznámou v. Po úpravách dostaneme $v = 90$ a $m = \frac{2}{3} \cdot 90 = 60\,(\mathrm{cm})$.

Pokud ve druhém řešení místo $p_m = \frac{9}{4}p_v$ vyjádříme $p_v = \frac{4}{9}p_m$, potom po dosazení do (2) dostáváme rovnici s neznámou p_m. Po jednoduché úpravě dostaneme $p_m = 54$, jehož jediný vyhovující rozklad je $54 = 6 \cdot 9$, tudíž $m = \frac{360}{6} = \frac{540}{9} = 60\,(\mathrm{cm})$.

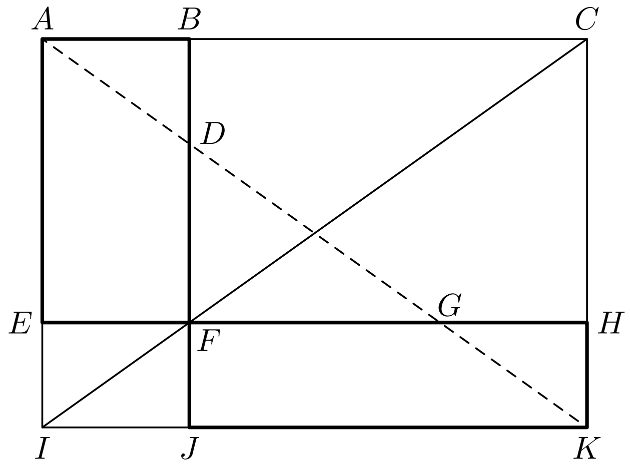
Z9–I–4

V pravoúhelníku $ACKI$ jsou vyznačeny dvě rovnoběžky se sousedními stranami a jedna úhlopříčka. Přitom trojúhelníky ABD a GHK jsou shodné. Určete poměr obsahů pravoúhelníků $ABFE$ a $FHKJ$. (*V. Žádník*)



Nápověda. Bod F leží na úhlopříčce IC.

Možné řešení. Ze zadání plyne, že trojúhelník ABD je shodný také např. s trojúhelníkem IJF. Odpovídající shodnost je právě osová souměrnost podle přímky, která je kolmá k úsečce AI a prochází jejím středem. Podle této přímky jsou souměrné také úhlopříčky pravoúhelníku $ACKI$, což znamená, že bod F leží na úhlopříčce IC.



Obsah pravoúhelníku $ABFE$ tedy můžeme vyjádřit jako obsah trojúhelníku IAC zmenšený o obsahy trojúhelníků IEF a FBC. Podobně můžeme obsah pravoúhelníku $FHKJ$ vyjádřit jako obsah trojúhelníku CKI zmenšený o obsahy trojúhelníků FJI a CHF. Trojúhelníky IAC a CKI, IEF a FJI, FBC a CHF jsou však po dvojicích shodné, tudíž mají po dvojicích stejné obsahy. Odtud vyplývá, že pravoúhelníky $ABFE$ a $FHKJ$ mají stejný obsah.

Jiná nápověda. Trojúhelníky ABD a GFD jsou podobné.

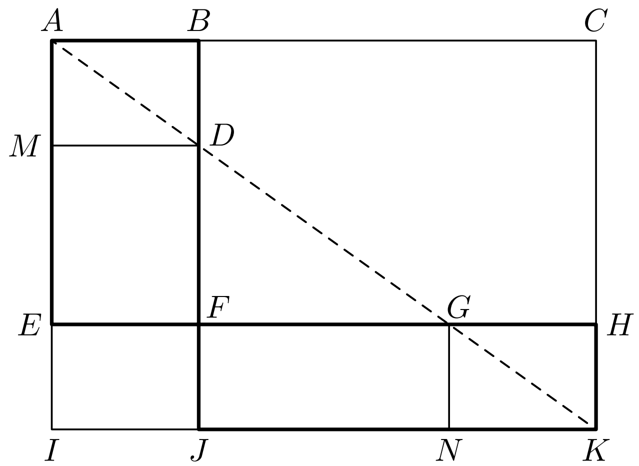
Jiné řešení. Ze zadání plyne, že trojúhelníky ABD a GFD mají po dvojicích shodné vnitřní úhly, pročež jsou podobné a odpovídající strany jsou tudíž ve stejném poměru:

$$|AB| : |BD| = |GF| : |FD|,$$

neboli

$$|AB| \cdot |FD| = |GF| \cdot |BD|.$$

Protože $|AB| = |EF|$ a $|BD| = |FJ|$, můžeme předchozí rovnost interpretovat jako rovnost obsahů pravoúhelníků $EFDM$ a $GFJN$.



Pravoúhelník $ABFE$ sestává z pravoúhelníků $EFDM$ a $ABDM$, pravoúhelník $FHKJ$ sestává z pravoúhelníků $GFJN$ a $GHKN$, přičemž pravoúhelníky $ABDM$ a $GHKN$ jsou zřejmě shodné. Odtud vyplývá, že pravoúhelníky $ABFE$ a $FHKJ$ mají stejný obsah.

Poznámka. Druhou část prvního řešení lze najít jako samostatné tvrzení v Eukleidových Základech (43. tvrzení v I. knize). Tento poznatek se používá např. při konstrukci pravoúhelníku, který má dánu jednu stranu a stejný obsah jako jiný pravoúhelník (příp. trojúhelník či obecný mnohoúhelník).

Z9–I–5

Eva řešila experimentální úlohu fyzikální olympiády. Dopoledne od 9:15 prováděla v tříminutových odstupech 4 měření. Získané hodnoty zapisovala do tabulky, kterou si připravila v počítači:

hodin	minut	hodnota
9	15	
9	18	
9	21	
9	24	

Odpoledne v experimentu pokračovala. Tentokrát provedla v tříminutových odstupech 9 měření a hodnoty zapisovala do podobné tabulky. Omylem do počítače zadala, aby se zobrazil součet devíti čísel z prostředního sloupce. Tento zbytečný výpočet vyšel 258.

Která čísla byla v daném sloupci? *(L. Šimůnek)*

Nápověda. Dokažte, že během experimentu musela minutová ručička dosáhnout ke dvanáctce.

Možné řešení. Pokud během experimentu nedosáhla minutová ručička ke dvanáctce, můžeme čísla ve sloupci minut označit takto:

$$x,\ x+3,\ x+6,\ x+9,\ x+12,\ x+15,\ x+18,\ x+21,\ x+24.$$

Jejich součet je $9x + 108$, což má být rovno 258:

$$\begin{aligned} 9x + 108 &= 258, \\ 9x &= 150. \end{aligned}$$

To však není možné, protože x je přirozené číslo a 150 není násobkem 9.

Proto musela minutová ručička v průběhu experimentu dosáhnout ke dvanáctce. Od tohoto okamžiku jsou všechna čísla oproti předchozí posloupnosti zmenšena o 60. Pokud počet měření od dosažení dvanáctky označíme z, pak součet čísel v daném sloupci je roven

$$9x + 108 - 60z = 258, \tag{1}$$

přičemž z je přirozené číslo od 1 do 8. Po úpravách dostáváme:

$$9x = 150 + 60z,$$
$$3x = 50 + 20z.$$

Přirozené číslo na levé straně je násobkem tří. Aby bylo číslo na pravé straně také násobkem tří, musí být z rovno 2, 5 nebo 8. Pro každou hodnotu z vypočteme x a provedeme diskusi:

- Pro $z = 2$ dostaneme $x = 30$. Pokud by experiment začal ve 30. minutě, skončil by v 54. minutě a k přechodu přes dvanáctku by vůbec nedošlo. To je v rozporu s předpokladem $z = 2$.
- Pro $z = 5$ dostaneme $x = 50$. Pokud by experiment začal v 50. minutě, skončil by ve 14. minutě:
$$50,\ 53,\ 56,\ 59,\ 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14. \tag{2}$$
  Po dosažení dvanáctky by se tak uskutečnilo pět měření, což je v souladu s předpokladem $z = 5$.
- Pro $z = 8$ dostaneme $x = 70$. Avšak x označuje minuty po celé hodině a může nabývat jen hodnot 0 až 59.

Z uvedených řešení rovnice (1) vyhovuje pouze druhá možnost. Čísla, která byla napsána ve sloupci minut, jsou uvedena v řádku (2).

Z9–I–6

V hostinci U Tří prasátek obsluhují Pašík, Rašík a Sašík. Pašík je nečestný, takže každému hostovi připočítá k celkové ceně 10 krejcarů. Rašík je poctivec, každému vyúčtuje přesně to, co snědl a vypil. Sašík je dobrák, takže každému hostovi dá slevu z celkové útraty ve výši 20 %. Prasátka si jsou tak podobná, že žádný host nepozná, které zrovna obsluhuje.

Beránek Vendelín si v pondělí objednal tři koláčky a džbánek džusu a zaplatil za to 56 krejcarů. Byl spokojen, takže hned v úterý snědl pět koláčků, vypil k nim tři džbánky džusu a platil 104 krejcarů. Ve středu snědl osm koláčků, vypil čtyři džbánky džusu a zaplatil 112 krejcarů.

1. Kdo obsluhoval Vendelína v pondělí, kdo v úterý a kdo ve středu?
2. Kolik krejcarů účtuje Rašík za jeden koláček a kolik za jeden džbánek džusu?

(Všechny koláčky jsou stejné, stejně tak všechny džbánky džusu. Ceny uváděné v jídelním lístku se v uvedených dnech neměnily.) (*M. Petrová*)

Nápověda. Kolik toho Vendelín snědl a vypil v pondělí a v úterý dohromady?

Možné řešení. Všimneme si, že Vendelín snědl a vypil ve středu totéž, co v pondělí a v úterý dohromady. Jenže v pondělí a v úterý dohromady utratil $56 + 104 = 160$ krejcarů, zatímco ve středu platil 112 krejcarů, což je o 48 krejcarů méně. Diskutujme, kdo mohl obsluhovat ve středu:

- Kdyby to byl poctivec Rašík, musel by hostinec během pondělí a úterý ošidit Vendelína právě o 48 krejcarů. Při dvou placeních však lze zákazníka ošidit maximálně o 20 krejcarů. Možnost, že ve středu obsluhoval Rašík, proto zavrhujeme.

- Kdyby to byl Pašík, byla by skutečná středeční cena $112 - 10 = 102$ krejcarů. Vendelína by museli během prvních dvou dnů ošidit dokonce o 58 krejcarů. Možnost, že ve středu obsluhoval Pašík, také zavrhujeme.
- Kdyby to byl Sašík, představovala by útrata 112 krejcarů 80 % skutečné ceny. To znamená, že skutečná středeční cena by byla $112 : 0{,}8 = 140$ krejcarů. Hostinec by musel během pondělí a úterý ošidit Vendelína o 20 krejcarů. To se mohlo stát jen tehdy, pokud ho v oba dny obsluhoval nečestný Pašík. Tato možnost vyhovuje.

Známe tedy odpověď na první otázku: V pondělí a úterý obsluhoval Pašík, ve středu Sašík. Skutečné ceny (tj. ceny podle Rašíka) tak byly:

- pondělí (3 koláčky, 1 džbánek): $56 - 10 = 46$ krejcarů,
- úterý (5 koláčků, 3 džbánky): $104 - 10 = 94$ krejcarů,
- středa (8 koláčků, 4 džbánky): $112 : 0{,}8 = 140$ krejcarů.

Z Vendelínovy středeční objednávky můžeme odvodit, že 2 koláčky a 1 džbánek džusu stojí $140 : 4 = 35$ krejcarů. Porovnáním s Vendelínovou pondělní objednávkou zjišťujeme, že skutečná cena jednoho koláčku je $46 - 35 = 11$ krejcarů. Podle pondělní objednávky určíme i skutečnou cenu jednoho džbánku: $46 - 3 \cdot 11 = 13$ krejcarů. Tím máme odpověď na druhou otázku: Rašík účtuje za jeden koláček 11 krejcarů a za jeden džbánek džusu 13 krejcarů.