

II. kolo kategorie Z5

Z5–II–1

Podél pláže jsou vyznačena stejně dlouhá parkovací místa. Vozidla parkují za sebou a všichni řidiči vyznačená místa dodržují. Parkoviště je rezervováno pouze pro autobusy a každý autobus zabírá právě tři parkovací místa.

V jistou chvíli stály na parkovišti jenom dva autobusy — jeden zabíral páté až sedmé místo zleva, druhý zabíral osmé až desáté místo zprava. Později zde zaparkovaly další čtyři autobusy, a kdyby přijel ještě jeden, dostatečně velké místo k zaparkování by už nenašel. Určete, kolik nejvíce parkovacích míst mohlo být na parkovišti. (E. Patáková)

Možné řešení. Máme určit, kolik nejvíce míst může být na parkovišti, musíme tedy zjistit, jak nejméně hospodárně mohou být autobusy zaparkovány. Uvažujeme taková rozmístění, aby mezery mezi autobusy byly největší možné a současně takové, aby se do těchto mezer žádný další autobus nevešel. Ze zadání plyne, že maximální možná mezera sestává ze dvou parkovacích míst.

Znáznorníme si, jak byly autobusy zaparkovány na začátku:



Před prvním autobusem jsou čtyři volná místa. Tam se vejde jeden autobus (a to dvojím způsobem).

Za druhým autobusem je sedm volných míst. Tam by se mohly vejít dva autobusy; pokud je však jeden autobus zaparkován jako na následujícím obrázku, pak se tam už žádný další nevejde:



Zbývají dva autobusy budou zaparkovány mezi původními dvěma autobusy ve střední části, jejíž délku neznáme. Nejméně hospodárné rozmístění je takové, aby mezera mezi každými dvěma autobusy byla právě dvě parkovací místa:

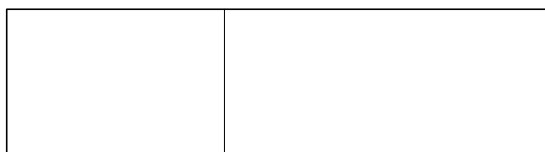


Vidíme, že mezi původně naznačenými parkovacími místy může být nejvýše 12 dalších míst. Parkoviště může mít nejvíce $7 + 12 + 10 = 29$ parkovacích míst.

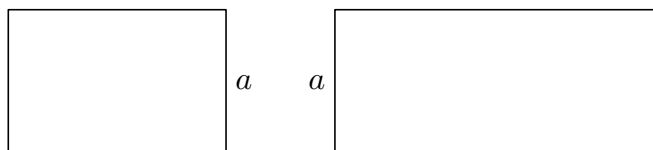
Hodnocení. 1 bod za umístění jednoho autobusu na levý konec; 2 body za umístění jednoho autobusu na pravý konec; 2 body za umístění zbylých dvou autobusů mezi dva původní (z toho 1 bod za zdůvodnění); 1 bod za výsledný počet parkovacích míst.

Z5–II–2

Libor rozdělil obdélník jednou čarou na dva menší obdélníky. Obvod velkého obdélníku je 76 cm, obvody menších obdélníků jsou 40 cm a 52 cm. Určete rozměry velkého obdélníku.
(L. Šimůnek)



Možné řešení. Společnou stranu dvou menších obdélníků označíme a a tyto dva obdélníky překreslíme oddělené od sebe.



Součet obvodů dvou menších obdélníků je $40 + 52 = 92$ (cm), což je o 16 cm více než obvod původního obdélníku, neboť $92 - 76 = 16$. Těchto 16 cm odpovídá dvěma stranám a , strana a má proto délku $16 : 2 = 8$ (cm).

Stejnou délku mají i dvě strany původního obdélníku, součet délek jeho zbylých dvou stran je $76 - 2 \cdot 8 = 60$ (cm), každá z nich je tedy dlouhá $60 : 2 = 30$ (cm). Rozměry původního velkého obdélníku jsou 30 cm a 8 cm.

Hodnocení. 4 body za kratší stranu obdélníku (z toho 2 za zdůvodnění); 2 body za delší stranu obdélníku (z toho 1 za zdůvodnění).

Z5–II–3

Jirka a Petr spustili stopky a do 15 sekund od spuštění každý z nich začal tleskat. Jirka tleskal pravidelně každou 7. sekundu, Petr tleskal pravidelně každou 13. sekundu. V 90. sekundě tleskli oba současně. Určete všechny možnosti, kdy mohl začít tleskat Jirka a kdy Petr.
(L. Dedková)

Možné řešení. Postupně od konce vypíšeme, v kolikáté sekundě tleskal Jirka a v kolikáté Petr.

- Jirka: 90, 83, 76, 69, 62, 55, 48, 41, 34, 27, 20, **13**, **6**.
- Petr: 90, 77, 64, 51, 38, 25, **12**.

Čas prvního tlesknutí má být menší nebo roven 15 sekundám. Jirka proto mohl začít tleskat v šesté nebo třinácté sekundě, Petr musel začít tleskat ve dvanácté sekundě.

Jiné řešení. Stejného výsledku lze dosáhnout pomocí dělení se zbytkem.

- Protože $90 : 7$ je 12, zbytek 6, znamená to, že Jirka mohl začít tleskat v 6. sekundě (a do 90. sekundy tleskl ještě dvanáctkrát).

- Protože $90 : 13$ je 6, zbytek 12, znamená to, že Petr mohl začít tleskat ve 12. sekundě (a do 90. sekundy tleskl ještě šestkrát).

Postupně vypisujeme další tlesknutí obou chlapců a zvýrazňujeme ta, která vyhovují podmínce v zadání:

- Jirka: **6**, **13**, 20, ...
- Petr: **12**, 25, ...

Hodnocení. Po 3 bodech za výpis a odpověď u každého z chlapců. Pokud řešitel zapomene u Jirky druhé řešení, strhněte jeden bod.