64. ročník Matematické olympiády

II. kolo kategorie Z5

Z5–II–1

V kouzelnickém bazaru si kouzelníci mezi sebou měnili kouzelnické klobouky, hůlky a pláště. Za 4 hůlky je 6 plášťů a za 5 hůlek je 5 klobouků. Kolik plášťů je za 5 hůlek a 1 klobouk? (*V. Hucíková*)

Možné řešení. Za 5 hůlek je 5 klobouků. Za 1 hůlku je tedy 1 klobouk, a proto 5 hůlek a 1 klobouk má stejnou hodnotu jako 6 hůlek.

Dále víme, že za 4 hůlky je 6 plášťů. Za 2 hůlky jsou tedy 3 pláště, a proto 6 hůlek má stejnou hodnotu jako 9 plášťů.

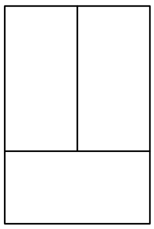
Celkem tedy vidíme, že 5 hůlek a 1 klobouk má stejnou hodnotu jako 9 plášťů.

Návrh hodnocení. 2 body za odvození vztahu 5 hůlek + 1 klobouk = 6 hůlek; 3 body za odvození vztahu 6 hůlek = 9 plášťů; 1 bod za odpověď.

Z5–II–2

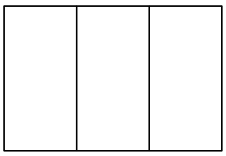
Jirka měl tři shodné obdélníky. Nejdřív je k sobě přiložil tak jako na obrázku a dostal obdélník, který měl obvod 20 cm. Poté je k sobě přiložil jinak a dostal obdélník s jiným obvodem. Jaký obvod měl tento obdélník?

(Při každém přiložení se žádné dva obdélníky nepřekrývají ani mezi nimi není mezera.) (*E. Novotná*)



Možné řešení. Z poskládaného útvaru vidíme, že delší strana každého ze tří Jirkových obdélníků je stejně dlouhá jako dvě strany kratší. Velký obdélník na obrázku má obvod složený ze tří delších a čtyř kratších stran malých obdélníků. Protože součet tří delších stran je stejně velký jako součet šesti kratších, je obvod velkého obdélníku roven $6+4=10$ kratším stranám malého obdélníku. Protože velký obdélník má obvod 20 cm, je kratší strana malého obdélníku rovna $20:10=2$ (cm). Malé obdélníky tedy mají rozměry $2\,\mathrm{cm} \times 4\,\mathrm{cm}$.

Dané tři obdélníky lze k sobě podle uvedených pravidel přikládat ještě následujícími způsoby:



a) V prvním případě je obvod velkého obdélníku roven součtu 6 kratších a 2 delších stran malého obdélníku, tj. $6 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 20$ (cm).
b) Ve druhém případě je obvod velkého obdélníku roven součtu 6 delších a 2 kratších stran malého obdélníku, tj. $6 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 28$ (cm).

V prvním případě je obvod stejný jako obvod obdélníku ze zadání, ve druhém případě je jiný. Nově vzniklý Jirkův obdélník měl obvod 28 cm.

Návrh hodnocení. 2 body za objev, že malý obdélník má jeden rozměr dvakrát větší než druhý; 2 body za vyčíslení rozměrů malého obdélníku; 1 bod za obdélník s jiným obvodem; 1 bod za jeho obvod.

Diskuse možnosti a) není povinnou součástí řešení.

Z5–II–3

Z čísla 215 můžeme vytvořit čtyřmístné číslo tím, že mezi jeho číslice vepíšeme jakoukoli další číslici. Takto jsme vytvořili dvě čtyřmístná čísla, jejichž součet byl 4 360. Jaká dvě čtyřmístná čísla to mohla být? Určete všechny možnosti. (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Nově vytvořené čtyřmístné číslo je buď typu $2{*}15$, nebo typu $21{*}5$. V úloze vytvořená čísla mohla být buď a) obě prvního typu, nebo b) obě druhého typu, nebo c) každé jiného typu.

a) V tomto případě končí součet $2{*}15 + 2{*}15$ číslem 30, což je v rozporu se zadaným součtem 4 360. V úloze vytvořená čísla proto nemohla být obě typu $2{*}15$.

b) Tento případ řešíme jako algebrogram:

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & * & 5 \\ 2 & 1 & * & 5 \\ \hline 4 & 3 & 6 & 0 \end{array}$$

Ve sloupci stovek si všimneme, že po sečtení $1+1$ je ve výsledku zapsána číslice 3, ve sloupci desítek proto jistě došlo k přechodu přes desítku. Ve sloupci jednotek sčítáme $5 + 5 = 10$ a ve výsledku je na místě desítek zapsána číslice 6. Proto místa označená hvězdičkami skrývají číslice se součtem 15. Může jít buď o součet $9 + 6$, nebo $8 + 7$. Tento algebrogram má tak dvě řešení.

c) Tento případ řešíme jako algebrogram:

$$\begin{array}{cccc} 2 & * & 1 & 5 \\ 2 & 1 & * & 5 \\ \hline 4 & 3 & 6 & 0 \end{array}$$

Podobnými úvahami jako výše zjišťujeme, že tento algebrogram má jediné řešení: na místo desítek patří číslice 4, na místo stovek 2.

Úloha má celkem tři řešení: hledanou dvojicí čísel jsou buď čísla 2 195 a 2 165, nebo čísla 2 185 a 2 175, nebo čísla 2 215 a 2 145.

Návrh hodnocení. 3 body za řešení $2\,195 + 2\,165$ a $2\,185 + 2\,175$ (z toho po 1 bodu za každé řešení a 1 bod za komentář); 2 body za řešení $2\,215 + 2\,145$; 1 bod za vyloučení možnosti $2{*}15 + 2{*}15$.