

II. kolo kategorie Z7

Z7–II–1

Najděte všechna přirozená čísla od 90 do 150 taková, že ciferný součet jejich ciferného součtu je roven 1. (E. Semerádová)

Možné řešení. Hledané číslo je nanejvýš trojmístné, proto je jeho ciferný součet nanejvýš dvojmístné číslo. Aby byl ciferný součet tohoto čísla roven 1, musí být ciferný součet hledaného čísla 1 nebo 10. Jediné přirozené číslo od 90 do 150 s ciferným součtem 1 je číslo 100. Všechna přirozená čísla od 90 do 150 s ciferným součtem 10 jsou 91, 109, 118, 127, 136, 145. Úloha má celkem sedm řešení:

$$91, 100, 109, 118, 127, 136, 145.$$

Návrh hodnocení. Po 1 bodu za odhalení možných ciferných součtů 1 a 10; zbylé 4 body rozdělte podle počtu nalezených řešení (4 body za všech 7 řešení, 3 body za 6–5 řešení, 2 body za 4–3 řešení, 1 bod za 2–1 řešení).

Z7–II–2

Sedmé třídy z naší školy soutěžily ve sbírání víček od PET lahví. Třída A posbírala polovinu toho, co třídy B a C dohromady, třída B posbírala třetinu toho, co třídy A a C dohromady, a třída C posbírala 150 víček.

Určete, kolik víček posbíraly tyto tři třídy dohromady. (M. Volfová)

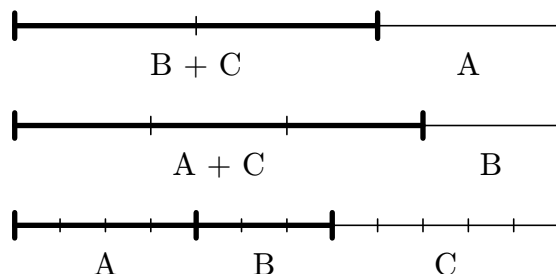
Možné řešení. Třída A posbírala polovinu toho, co třídy B a C dohromady; to znamená, že třída A posbírala třetinu celkového počtu víček. Třída B posbírala třetinu toho, co třídy A a C dohromady; to znamená, že třída B posbírala čtvrtinu celkového počtu víček. Třídy A a B tedy dohromady posbíraly

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

celkového počtu víček.

Třída C tak posbírala $\frac{5}{12}$ celkového počtu víček, což bylo 150 kusů. Odtud vyplývá, že dvanáctinu celkové sbírky tvořilo $150 : 5 = 30$ víček. Celkem tedy všechny třídy dohromady posbíraly $12 \cdot 30 = 360$ víček.

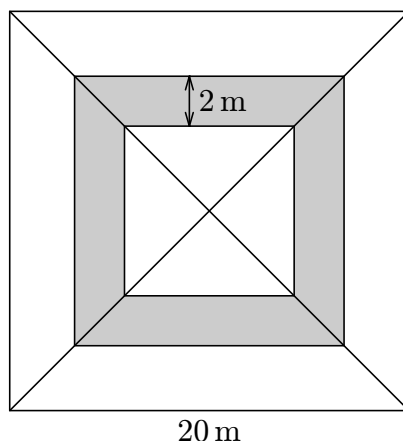
Pomocné grafické znázornění je na následujícím obrázku:



Návrh hodnocení. 2 body za poznatek, že třída A posbírala třetinu celkového počtu víček; 1 bod za obdobný poznatek pro třídu B; 2 body za poznatek, že třída C posbírala $\frac{5}{12}$ celkového počtu; 1 bod za dořešení úlohy.

Z7–II–3

Probíhá rekonstrukce náměstí ve tvaru čtverce se stranou 20 metrů. Kdyby bylo celé vydlážděno levnější světlou dlažbou, byly by náklady na materiál 100 000 Kč. Kdyby bylo celé náměstí pokryto dražší tmavou dlažbou, stál by materiál 300 000 Kč. Architekt však v centrální části náměstí navrhl světlou čtvercovou část, která bude olemována pruhem tmavé dlažby o šíři 2 metry, a ve vnější části náměstí bude stejná světlá dlažba jako uprostřed (viz obrázek). Podle tohoto návrhu budou náklady na materiál tmavé části stejné jako na celkový materiál světlých částí.



Určete:

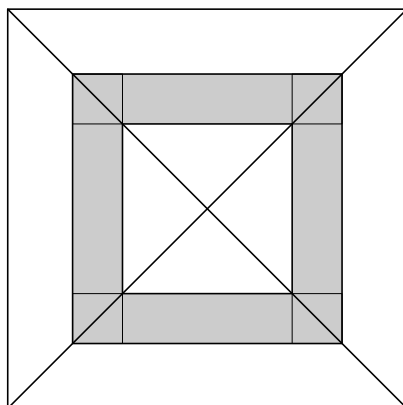
- kolik bude stát materiál na vydláždění náměstí podle tohoto projektu,
- jak dlouhá bude strana světlého čtverce v centrální části náměstí.

(L. Šimůnek)

Možné řešení. a) Světla dlažba je třikrát levnější než tmavá. Náklady na světlou a tmavou část náměstí jsou stejné, proto je světla část plochy třikrát větší než tmavá. Tmavá část tak tvoří jednu čtvrtinu náměstí, náklady na ni jsou $300\,000 : 4 = 75\,000$ (Kč). Náklady na světlou část jsou stejné. Dlažba na celé náměstí podle daného projektu tedy stojí

$$2 \cdot 75\,000 = 150\,000 \text{ (Kč)}.$$

b) Celé náměstí má plochu $20 \cdot 20 = 400$ (m^2). Z předchozí části víme, že tmavší plocha tvoří čtvrtinu náměstí, tedy $400 : 4 = 100$ (m^2). Tuto plochu můžeme vyjádřit jako součet čtyř stejných čtverců a čtyř stejných obdélníků, viz obrázek.



Každý ze zmiňovaných čtverců má obsah $2 \cdot 2 = 4 \text{ (m}^2\text{)}$, zbylá část tmavé plochy má obsah $100 - 4 \cdot 4 = 84 \text{ (m}^2\text{)}$. Obsah každého ze zmiňovaných obdélníků je proto roven $84 : 4 = 21 \text{ (m}^2\text{)}$. Jedna strana obdélníku měří 2 m, délka druhé strany je tedy

$$21 : 2 = 10,5 \text{ (m)},$$

a to je zároveň délka strany světlého čtverce v centrální části náměstí.

Návrh hodnocení. 2 body za úkol a), z toho 1 bod za vysvětlení; 4 body za úkol b), z toho 3 body za vysvětlení (např. 1 bod za obsah šedé plochy, 1 bod za nápad oddělit čtverce v rozích, 1 bod za obsah pomocného obdélníku).