II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

Myslím na několik bezprostředně po sobě jdoucích přirozených čísel. Kdybychom z nich vyškrtli čísla 70, 82 a 103, aritmetický průměr čísel by se nezměnil. Kdybychom místo toho vyškrtli čísla 122 a 123, aritmetický průměr by se zmenšil přesně o 1. Na která přirozená čísla myslím? (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Pokud se škrtnutím trojice čísel množiny nezmění její aritmetický průměr, má tato trojice čísel stejný aritmetický průměr jako celá množina. Aritmetický průměr celé množiny čísel je tedy

$$\frac{70+82+103}{3}=85.$$

Počet čísel celé množiny označíme n. Po škrtnutí čísel 122 a 123 zbude $n-2$ čísel a dle zadání se aritmetický průměr zmenší o 1, tedy bude 84. Vynásobením aritmetického průměru čísel a počtu těchto čísel dostaneme jejich součet. Na základě toho sestavíme následující rovnici, kterou vyřešíme:

$$\begin{aligned}85n&=84(n-2)+122+123,\\85n&=84n+77,\\n&=77.\end{aligned}$$

Neznámou množinu čísel tvoří 77 bezprostředně po sobě jdoucích čísel.

Prostřední číslo je rovno aritmetickému průměru, před ním a za ním je 38 čísel, neboť $77=2\cdot 38+1$. Nejmenší číslo množiny je tedy $85-38=47$ a největší $85+38=123$. Hledanými čísly jsou přirozená čísla od 47 do 123 včetně.

Jiné řešení. Stejným způsobem zjistíme, že aritmetický průměr množiny čísel před škrtáním je 85. Vyškrtnutá čísla 122 a 123 pak vyjádříme pomocí tohoto průměru: $122=85+37$, $123=85+38$. V součtu čísel, která zůstanou po vyškrtnutí čísel 122 a 123, „chybí“ právě součet $37+38$ k tomu, aby tato čísla měla aritmetický průměr 85. Ze zadání víme, že aritmetický průměr těchto zbylých čísel je o 1 menší než 85, těchto čísel proto musí být právě $37+38$, tj. 75. Počet čísel před škrtáním byl $75+2$, tj. 77. Dále pokračujeme jako v předchozím řešení.

Návrh hodnocení. 2 body za průměr myšlených čísel (85); 3 body za počet myšlených čísel (77); 1 bod za myšlená čísla (47 až 123).

Z9–II–2

Po sobě jdoucí přirozená čísla postupně přičítáme a odčítáme podle následujícího návodu:

$$1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - 11 - 12 + \ldots,$$

tedy stále se opakují dva sčítanci kladní a dva záporní.

Určete, jaká bude hodnota takového výrazu, jehož poslední člen je 2 015.

(*L. Hozová*)

Možné řešení. Součty dvojic sousedících čísel s opačnými znaménky jsou buď -1, nebo 1. Tyto hodnoty se navíc pravidelně střídají. V uvažovaném výrazu se tedy vždy několik sousedících čísel zruší:

$$\begin{aligned} & 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - 11 - 12 + 13 + \ldots \\ = & [1 + (2 - 3)] + [(-4 + 5) + (6 - 7)] + [(-8 + 9) + (10 - 11)] + [(-12 + 13) + \ldots \\ = & [1 - 1] + [1 - 1] + [1 - 1] + [1 - \ldots \\ = & 0 + 0 + 0 + \ldots \end{aligned}$$

První nulu dostáváme jako součet první trojice čísel, ostatní nuly dostáváme jako součty po sobě jdoucích čtveřic čísel. Součet uvedeného výrazu by tedy byl roven nule, pokud by končil číslem 3, 7, 11, 15 atd. Obecněji součet takového výrazu je roven nule právě tehdy, když končí číslem, které má po dělení čtyřmi zbytek 3. Protože číslo 2 015 má právě tuto vlastnost, je hodnota zadaného výrazu rovna nule.

Návrh hodnocení. 1 bod za objev, že součty dvojic sousedních čísel s opačnými znaménky jsou střídavě -1 a 1; 2 body za objev, že součty po sobě jdoucích čtveřic, resp. první trojice čísel jsou rovny 0; 3 body za správné určení a zdůvodnění celkového součtu.

Poznámka. Úvodní postřehy je možné zúročit různými způsoby, které mohou vést k podrobnější diskusi nad znaménky u čísel na konci daného výrazu. Z uvedeného řešení plyne, že tento výraz končí takto:

$$\ldots + [(-2\,012 + 2\,013) + (2\,014 - 2\,015)].$$

Sčítance daného výrazu je možné seskupovat také např. takto:

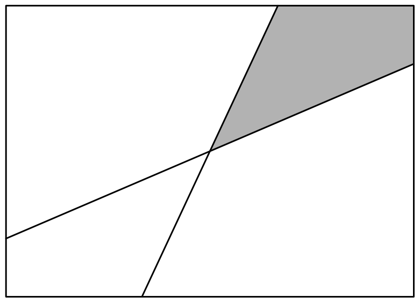
$$[1 + 2 - 3 - 4] + [5 + 6 - 7 - 8] + [9 + 10 - 11 - 12] + \ldots = -4 - 4 - 4 - \ldots$$

Takových čtveřic lze utvořit nejvýše 503 ($2\,015 = 503 \cdot 4 + 3$). Celkový součet je podle tohoto návodu vyjádřen následovně:

$$503 \cdot (-4) + 2\,013 + 2\,014 - 2\,015 = -2\,012 + 2\,013 + 2\,014 - 2\,015 = 0.$$

Z9–II–3

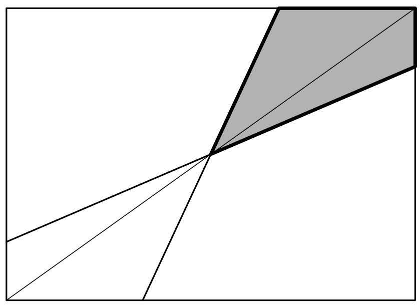
Anička dostala k narozeninám dort ve tvaru obdélníku. Rozkrojila ho pomocí dvou přímých řezů. Jeden řez vedla tak, že obě delší strany obdélníku protínal v jejich jedné třetině, a druhý řez vedla tak, že obě kratší strany obdélníku protínal v jejich jedné pětině. Ani jeden řez přitom nebyl rovnoběžný se stranami obdélníku a ke každému vrcholu obdélníku vždy přiléhaly buď dva kratší úseky rozdělených stran, nebo dva delší úseky rozdělených stran.



Anička snědla šedě označený kus dortu. Určete, jak velká část dortu to byla.

(*A. Bohiniková*)

Možné řešení. Obdélník je středově souměrný podle středu, jenž je průsečíkem úhlopříček. Podle tohoto středu jsou také souměrné každé dva body, která leží na protějších stranách obdélníku a jsou ve stejných poměrech vzhledem k odpovídajícím si vrcholům. Takovými dvojicemi bodů jsou také body určující oba řezy ze zadání. Tyto řezy a úhlopříčky obdélníku se tedy protínají v jednom společném bodě. Jedna z těchto úhlopříček rozděluje šedě vyznačený čtyřúhelník na dva trojúhelníky, viz obrázek.



Jedna strana levého trojúhelníku je právě třetinou delší strany obdélníku a výška na tuto stranu je polovinou kratší strany obdélníku. Tento trojúhelník tedy zaujímá

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

obsahu celého obdélníku. Jedna strana pravého trojúhelníku je právě pětinou kratší strany obdélníku a výška na tuto stranu je polovinou delší strany obdélníku. Tento trojúhelník tedy zaujímá

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$$

obsahu celého obdélníku. Obsah šedého čtyřúhelníku je roven

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{5+3}{60}=\frac{2}{15}$$

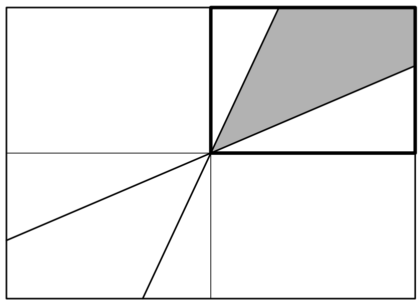
obsahu celého obdélníku. Snědená část tedy tvoří $\frac{2}{15}$ celého dortu.

Poznámka. Pokud velikost delší strany obdélníku označíme a a velikost kratší strany b, potom můžeme předchozí úvahy vyjádřit takto:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{5}\cdot\frac{a}{2}=\ldots=\frac{2ab}{15}.$$

Obdélník má obsah ab, snědená část tedy tvoří $\frac{2}{15}$ celého dortu.

Jiné řešení. V úvodu opět ukážeme, že se řezy protínají ve středu obdélníku. Tímto bodem prochází také osy obdélníku, které jej rozdělují na čtyři shodné obdélníky. Jeden z těchto obdélníků je řezy rozdělen na tři části sestávající z šedého čtyřúhelníku a dvou bílých pravoúhlých trojúhelníků.



Obsah šedé části můžeme vyjádřit tak, že od obsahu čtvrtinového obdélníku odečteme obsahy obou bílých trojúhelníků. Vzhledem k předchozímu značení jsou obsahy těchto trojúhelníků rovny:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{3}\right)\cdot\frac{b}{2}=\frac{ab}{24}\quad\text{a}\quad\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b}{2}-\frac{b}{5}\right)\cdot\frac{a}{2}=\frac{3ab}{40}.$$

Obsah šedé plochy tedy vychází:

$$\frac{ab}{4}-\frac{ab}{24}-\frac{3ab}{40}=\frac{(30-5-9)ab}{120}=\frac{2ab}{15}.$$

Opět docházíme k závěru, že snědená část tvoří $\frac{2}{15}$ dortu.

Návrh hodnocení. 1 bod za zdůvodnění, že se řezy protínají ve středu obdélníku (lze dokázat s využitím středové souměrnosti, podobnosti či jiných osobitých úvah); 2 body za obsahy pomocných trojúhelníků; 2 body za výsledek; 1 bod dle kvality a úplnosti komentáře.

Z9–II–4

Jistý obdélník měl své rozměry vyjádřené v decimetrech celými čísly. Poté rozměry třikrát změnil. Nejprve jeden svůj rozměr zdvojnásobil a druhý změnil tak, aby měl stejný obsah jako na začátku. Poté jeden rozměr zvětšil o 1 dm a druhý zmenšil o 4 dm, přičemž měl stále tentýž obsah jako na začátku. Nakonec svůj kratší rozměr zmenšil o 1 dm, delší ponechal beze změny.

Určete poměr délek stran posledního obdélníku. (*E. Novotná*)

Možné řešení. Označme délky stran obdélníku v decimetrech x a y; obsah obdélníku tedy byl $x \cdot y$. Předpokládejme, že při první změně se zvětšovala strana s délkou x. Po první změně měl obdélník stejný obsah, musel mít tedy rozměry $2x$ a $\frac{y}{2}$. Po druhé změně mohl mít buď rozměry a) $2x+1$ a $\frac{y}{2}-4$, anebo b) $2x-4$ a $\frac{y}{2}+1$. V každém případě měl obdélník i po druhé změně stejný obsah jako původně, tedy $x \cdot y$. Rozeberme obě možnosti:

a) V tomto případě platí

$$x \cdot y = (2x+1)\left(\frac{y}{2}-4\right).$$

Po úpravě dostáváme $0 = -8x + \frac{y}{2} - 4$, tedy $\frac{y}{2} - 4 = 8x$. Po druhé změně měl obdélník rozměry $2x+1$ a $8x$. Protože x je přirozené číslo, platí $8x > 2x+1$ a při třetí změně musel obdélník zkrátit svou stranu $2x+1$ na $2x$. Poměr stran výsledného obdélníku je v tomto případě roven $8x : 2x = 4 : 1$.

b) V tomto případě platí

$$x \cdot y = (2x-4)\left(\frac{y}{2}+1\right).$$

Po úpravě dostáváme $0 = 2x - 2y - 4$, tedy $2x - 4 = 2y$. Po druhé změně měl obdélník rozměry $2y$ a $\frac{y}{2}+1$. Protože y je přirozené číslo, platí $2y > \frac{y}{2}+1$ a při třetí změně musel obdélník zkrátit svou stranu $\frac{y}{2}+1$ na $\frac{y}{2}$. Poměr stran výsledného obdélníku je i v tomto případě roven $2y : \frac{y}{2} = 4 : 1$.

Návrh hodnocení. Po 3 bodech za rozbor každé z možností: 1 bod za vyjádření vztahu mezi x a y (např. $\frac{y}{2} - 4 = 8x$); 1 bod za vyjádření rozměrů obdélníku po jejich druhé změně (např. $2x+1$ a $8x$); 1 bod za označení kratší strany a vyjádření výsledného poměru.

Pokud řešitel označí u některé možnosti jeden rozměr za kratší bez jakékoli úvahy, strhněte u hodnocení této možnosti 1 bod.