64. ročník Matematické olympiády

III. kolo kategorie Z9

Z9–III–1

Petr, Martin a Jirka se trefovali do zvláštního terče, který měl pouze tři pole s navzájem různými hodnotami. Každý z chlapců házel celkem desetkrát a vždy se trefil do terče. Bodový zisk z prvních osmi hodů měli všichni tři chlapci stejný. Při posledních dvou střelách trefil Jirka dvakrát pole s nejmenší možnou hodnotou, Martin dvakrát pole se střední hodnotou a Petr dvakrát pole s největší hodnotou. Aritmetický průměr všech Martinových hodů byl o 1 větší než průměr Jirkův a Petrův průměr byl o 1 větší než průměr Martinův.

Určete všechny možné hodnoty polí na terči, víte-li, že jedna z nich byla 12.

(*E. Novotná*)

Možné řešení. Aritmetický průměr všech Martinových hodů byl o 1 větší než průměr Jirkův a každý z chlapců házel celkem desetkrát. Proto byl Martinův celkový součet o 10 větší než součet Jirkův. Tyto celkové součty se přitom lišily pouze o součty posledních dvou zásahů — Jirka trefil dvakrát pole s nejmenší možnou hodnotou, Martin dvakrát pole se střední hodnotou. Proto bylo pole se střední hodnotou o 5 větší než pole s nejmenší hodnotou.

Podobným způsobem lze zdůvodnit, že pole s největší hodnotou bylo o 5 větší než pole se střední hodnotou. Jedna z hodnot těchto tří polí byla 12, nevíme však, zda to byla ta nejmenší, střední nebo největší. V úvahu přicházejí následující tři možnosti hodnot polí na terči:

- 12, 17, 22,
- 7, 12, 17,
- 2, 7, 12.

Poznámka. Součet prvních osmi hodů kteréhokoli z chlapců označíme S a neznámé hodnoty na terči postupně j, m a p, kde $j < m < p$. Při tomto značení lze začátek předchozího řešení zapsat následovně:

$$\frac{S + 2m}{10} = \frac{S + 2j}{10} + 1,$$
$$2m = 2j + 10,$$
$$m = j + 5.$$

Podobným způsobem lze zdůvodnit, že $p = m + 5$.

Návrh hodnocení. 4 body za objevení a zdůvodnění závislostí mezi hodnotami polí na terči; 2 body za uvedení všech tří možností hodnot na terči.

Z9–III–2

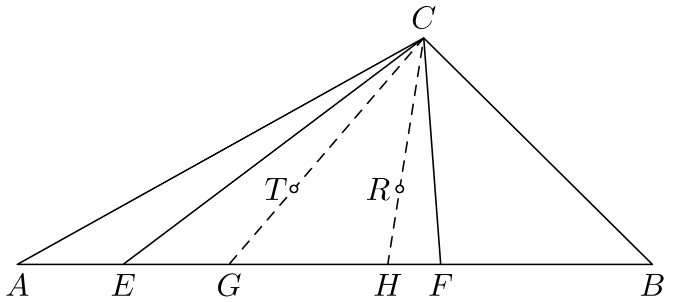
V trojúhelníku ABC leží na straně AB body E a F. Obsah trojúhelníku AEC je $1\,\mathrm{cm}^2$, obsah trojúhelníku EFC je $3\,\mathrm{cm}^2$ a obsah trojúhelníku FBC je $2\,\mathrm{cm}^2$. Bod T je těžištěm trojúhelníku AFC a bod G je průsečíkem přímek CT a AB. Bod R je těžištěm trojúhelníku EBC a bod H je průsečíkem přímek CR a AB.

Určete obsah trojúhelníku GHC. (*E. Semerádová*)

Možné řešení. Podmínkám ze zadání vyhovuje jediné uspořádání bodů E a F na úsečce AB, viz obrázek. Obsah trojúhelníku ABC je roven součtu obsahů trojúhelníků AEC, EFC a FBC, tj.

$$S_{ABC} = S_{AEC} + S_{EFC} + S_{FBC} = 1 + 3 + 2 = 6\,(\mathrm{cm}^2).$$

Tentýž obsah lze vyjádřit jako součet obsahů trojúhelníků AGC, GHC a HBC. Obsah prvního a třetího trojúhelníku odvodíme ze zadání, poté snadno určíme obsah trojúhelníku GHC.



Úsečka CG je těžnicí trojúhelníku AFC, a ta dělí tento trojúhelník na dva trojúhelníky se stejným obsahem. Přitom obsah trojúhelníku AFC je součtem obsahů trojúhelníků AEC a EFC, které známe. Platí tedy

$$S_{AGC} = \frac{1}{2}(S_{AEC} + S_{EFC}) = \frac{1}{2}(1 + 3) = 2\,(\mathrm{cm}^2).$$

Podobným způsobem lze zdůvodnit, že obsah trojúhelníku HBC je roven

$$S_{HBC} = \frac{1}{2}(S_{EFC} + S_{FBC}) = \frac{1}{2}(3 + 2) = 2{,}5\,(\mathrm{cm}^2).$$

Obsah trojúhelníku GHC je proto roven

$$S_{GHC} = S_{ABC} - S_{AGC} - S_{HBC} = 6 - 2 - 2{,}5 = 1{,}5\,(\mathrm{cm}^2).$$

Návrh hodnocení. 1 bod za uspořádání bodů E a F na úsečce AB (stačí náčrtek); 2 body za zjištění, že úsečka CG, resp. CH dělí trojúhelník AFC, resp. EBC na dva trojúhelníky se stejným obsahem; 3 body za odvození hledaného obsahu.

Poznámka. Všechny diskutované trojúhelníky mají společnou výšku ze společného vrcholu C. Proto jsou poměry obsahů kterýchkoli dvou trojúhelníků stejné jako poměry velikostí stran, které jsou protilehlé vrcholu C. K určení obsahu trojúhelníku GHC proto stačí určit poměr délky strany GH vzhledem k délce strany některého z trojúhelníků se známým obsahem:

Pokud např. označíme $|AE| = a$, potom $|EF| = 3a$ a $|FB| = 2a$ Jelikož CG je těžnicí trojúhelníku AFC, je bod G středem úsečky AF. Velikost této úsečky je $|AF| = |AE| + |EF| = 4a$, tudíž $|AG| = \frac{1}{2}|AF| = 2a$. Podobně se zdůvodní, že $|HB| = \frac{1}{2}(|EF| + |FB|) = 2{,}5a$. Velikost úsečky GH je proto rovna

$$|GH| = |AB| - |AG| - |HB| = (6 - 2 - 2{,}5)a = 1{,}5a.$$

Odtud plyne, že $S_{GHC} = 1{,}5 \cdot S_{AEC} = 1{,}5\,\mathrm{cm}^2$.

Z9–III–3

Určete, jaká je poslední číslice součinu všech sudých přirozených čísel, které jsou menší než 100 a které nejsou násobky desíti. (*M. Volfová*)

Možné řešení. Poslední číslice součinu je dána výhradně posledními číslicemi činitelů. Při řešení úlohy proto budeme ve výpočtech uvažovat pouze poslední číslice. Podle zadání násobíme deset čtveřic činitelů a v každé z nich jsou činitelé končící číslicemi 2, 4, 6 a 8. Součin $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$ má na místě jednotek číslici 4. Pro zjištění poslední číslice výsledku násobení deseti takových čtveřic stačí vynásobit deset čtyřek a při násobení sledovat pouze poslední číslici:

Součin $4 \cdot 4$ končí číslicí 6, proto místo násobení deseti čtyřek stačí vynásobit pět šestek. Číslo 6 násobeno sebou samým dá opět číslo končící číslicí 6, a proto součin pěti šestek, a tedy i deseti čtyřek končí číslicí 6. Hledaná číslice je 6.

Jiné řešení. Opět uvažujeme v součinech pouze poslední číslice. Máme zadáno deset činitelů končících číslicí 2, deset končících číslicí 4, deset končících číslicí 6 a deset končících číslicí 8. Postupně budeme uvažovat o každých deseti činitelích:

Při násobení $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ sledujeme pouze číslice na místě jednotek a zjistíme, že výsledek končí číslicí 4. Podobně zjistíme, že součin $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ končí číslicí 6, součin $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ končí číslicí 6 a součin $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$ končí číslicí 4. Poslední číslici hledaného součinu určíme vynásobením právě zjištěných číslic, tzn. $4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4$. Tento součin končí číslicí 6, tedy hledaná číslice je 6.

Návrh hodnocení. 1 bod za objev, že stačí uvažovat pouze poslední číslice činitelů; 4 body za mezivýsledky a jejich zdůvodnění (např. 2 body za poslední číslici součinu $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$ a 2 body za poslední číslici mocniny 4^{10}); 1 bod za hledanou číslici 6.

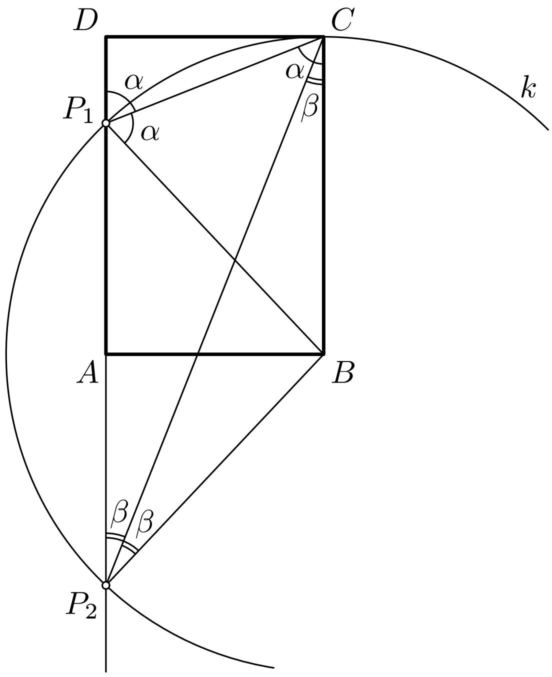
Z9–III–4

Je dán obdélník $ABCD$, jehož kratší strana je AB. Určete, pro které body P na přímce AD platí, že osa úhlu BPD prochází bodem C. Svoje tvrzení zdůvodněte a popište, jak byste všechny takové body sestrojili. (*L. Růžičková*)

Možné řešení. Střídavé úhly určené příčkou PC dvou rovnoběžných přímek AD a BC jsou shodné. Přitom bod P jistě leží na polopřímce DA. (Kdyby totiž ležel na opačné polopřímce, potom by bod C ležel mimo úhel BPD a osa tohoto úhlu by nemohla bodem C procházet.) Proto jsou úhly DPC a PCB shodné.

Podle zadání je přímka PC osou úhlu BPD, proto jsou také úhly DPC a CPB shodné. Trojúhelník CPB má tedy dva shodné vnitřní úhly u vrcholů C a P, proto je tento trojúhelník rovnoramenný s rameny BC a BP.

Z uvedeného vyplývá, že bod P je průsečíkem polopřímky DA a kružnice se středem v bodě B a poloměrem $|BC|$. Vzhledem k podmínce $|AB| < |BC|$ tato kružnice polopřímku DA protíná, a to ve dvou různých bodech (z nichž jeden je vnitřním bodem úsečky AD).



Návrh hodnocení. 2 body za objev a zdůvodnění shodnosti úhlů DPC a PCB; 2 body za objev a zdůvodnění vztahu $|BP| = |BC|$; 2 body za dořešení úlohy včetně diskuse počtu řešení.