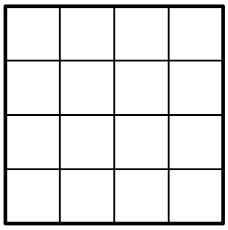
I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Čtverec se stranou 4 cm je rozdělen na čtverečky se stranou 1 cm jako na obrázku. Rozdělte čtverec podél vyznačených čar na dva útvary s obvodem 16 cm. Najděte alespoň tři různá řešení (tzn. taková tři řešení, aby žádný útvar jednoho řešení nebyl shodný s žádným útvarem jiného řešení). (*V. Hucíková*)

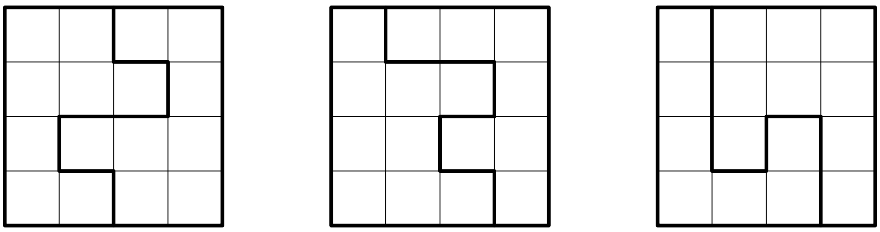


Nápověda. Kde na obvodu čtverce mohou být koncové body dělicí čáry?

Možné řešení. Lomená čára, která rozděluje čtverec na dva útvary, leží celá uvnitř čtverce, s jeho obvodem má společné pouze koncové body. Vzhledem k tomu, že nové útvary mají mít stejný obvod, musí mít stejnou také tu jeho část, která je na obvodu čtverce. Koncové body dělicí čáry proto musí být souměrné podle středu čtverce.

Daný čtverec má obvod 16 cm a obvod dvou nových útvarů má být dohromady 32 cm. Dělicí čára je společná oběma útvarům, dvojnásobek její délky proto odpovídá rozdílu $32 - 16 = 16$ (cm). Dělicí čára musí být dlouhá 8 cm.

Nyní nezbývá než zkoušet:



Poznámka. Jakékoli jiné rozdělení je shodné s některým z předchozích.

Z7–I–2

Na lyžařské soustředění přijeli 4 kamarádi ze 4 světových stran a vedli následující rozhovor.

Karel: „Nepřijel jsem ze severu ani z jihu.“

Mojmír: „Zato já jsem přijel z jihu.“

Pepa: „Přijel jsem ze severu.“

Zdenda: „Já z jihu nepřijel.“

Víme, že jedna výpověď není pravdivá. Určete, která to je.

Kdo tedy přijel ze severu a kdo z jihu? (*M. Volfová*)

Nápověda. Přeformulujte předchozí výpovědi vzhledem ke světovým stranám (nikoli vzhledem k jednotlivým kamarádům).

Možné řešení. Podle předchozích výroků si představíme, odkud kdo mohl přijet:

- ze severu Pepa, nebo Zdenda,
- z východu Karel, nebo Zdenda,
- z jihu Mojmír,
- ze západu Karel, nebo Zdenda.

Nyní zvažujeme, které výroky mohly být nepravdivé:

- Kdyby lhal Mojmír, museli by všichni ostatní mluvit pravdu, a to by znamenalo, že z jihu nepřijel nikdo. Mojmírova výpověď tedy byla pravdivá.
- Kdyby lhal Zdenda, musel by přijet z jihu, což by znamenalo, že lhal i Mojmír. Zdendova výpověď tedy byla pravdivá.
- Kdyby lhal Karel, musel by přijet ze severu, nebo z jihu. To by v prvním případě znamenalo, že lhal i Pepa, ve druhém případě, že lhal i Mojmír. Karlova výpověď tedy byla pravdivá.

Mojmír, Zdenda a Karel mluvili pravdu, lhal tedy Pepa (což vskutku není s ničím v rozporu). Ze severu proto přijel Zdenda, z jihu přijel Mojmír.

Poznámka. Pepa a Karel přijeli jeden z východu a jeden ze západu; z uvedeného nelze přesně určit, kdo přijel odkud.

Z7–I–3

Anička má 50 Kč, Anežka má 46 Kč a za všechny peníze chtějí koupit zákusky na rodinnou oslavu. Rozhodují se mezi dortíky a větrníky: větrník je o 4 Kč dražší než dortík a dortíků by se dalo za všechny peníze koupit o třetinu více než větrníků.

Kolik stojí každý ze zákusků? (*M. Volfová*)

Nápověda. Kolika způsoby lze beze zbytku utratit Aniččiny a Anežčiny peníze?

Možné řešení. Anička s Anežkou mají dohromady 96 Kč. Tuto částku lze utratit jen několika způsoby, jež jsou odvozeny z vyjádření čísla 96 jako součinu dvou přirozených čísel:

$$96 = 1 \cdot 96 = 2 \cdot 48 = 3 \cdot 32 = 4 \cdot 24 = 6 \cdot 16 = 8 \cdot 12.$$

Ceně větrníku a ceně dortíku mají odpovídat čísla s rozdílem 4. Takové dvojice čísel jsou mezi uvedenými součiniteli pouze tři (vyznačeny tlustě):

$$\mathbf{2} \cdot 48 = \mathbf{6} \cdot 16, \quad \mathbf{4} \cdot 24 = \mathbf{8} \cdot 12, \quad 6 \cdot \mathbf{16} = 8 \cdot \mathbf{12}.$$

V prvním případě by se děvčata rozhodovala mezi 48 dortíky po 2 Kč a 16 větrníky po 6 Kč; 48 však není o třetinu více než 16, proto tato možnost nevyhovuje.

Ve druhém případě by se děvčata rozhodovala mezi 24 dortíky po 4 Kč a 12 větrníky po 8 Kč; 24 však není o třetinu více než 12, proto ani tato možnost nevyhovuje.

Ve třetím případě by se děvčata rozhodovala mezi 8 dortíky po 12 Kč a 6 větrníky po 16 Kč; přitom 8 je o třetinu více než 6, proto se jedná o jedinou vyhovující možnost.

Jeden dortík stál 12 Kč, jeden větrník stál 16 Kč.

Jiné řešení. Za stejné peníze lze koupit o třetinu více dortíků než větrníků, tzn. za cenu 3 větrníků lze koupit 4 dortíky. Větrník je o 4 Kč dražší než dortík, 3 větrníky tedy stojí o 12 Kč více než 3 dortíky. Z uvedeného plyne, že 12 Kč plus cena 3 dortíků odpovídá ceně 4 dortíků. Proto dortík stojí 12 Kč. Větrník stojí o 4 Kč více, tedy 16 Kč.

(Pro kontrolu: za 96 Kč mohou dívky koupit $96 : 16 = 6$ větrníků nebo $96 : 12 = 8$ dortíků.)

Poznámka. Pro všechny, kdo umí vyjádřit podmínky ze zadání pomocí neznámých, dodáváme:

Pokud cenu dortíku označíme d (Kč), potom větrník stojí $d + 4$ (Kč). Pokud počet větrníků, které lze koupit za všechny peníze, označíme k, potom dortíků lze za stejné peníze koupit $\frac{4}{3}k$. Ze zadání víme, že

$$k \cdot (d + 4) = \frac{4}{3}k \cdot d.$$

Odtud vyplývá, že $3d + 12 = 4d$, tedy $d = 12$, resp. $d + 4 = 16$.

Z7–I–4

Napište místo hvězdiček číslice tak, aby následující zápis součinu dvou čísel byl platný:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & & * & * & * \\
 & \times & & * & * & * \\
\hline
 & & * & * & * & * \\
 & 4 & 9 & 4 & 9 & \\
 & * & * & * & & \\
\hline
* & * & * & 4 & * & *
\end{array}$$

(*L. Hozová*)

Nápověda. Začněte s druhou číslicí druhého součinitele.

Možné řešení. Číslo 4 949 je součinem prvního součinitele a druhé číslice druhého součinitele. Přitom $4\,949 = 707 \cdot 7$, tudíž

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 7 & 0 & 7 \\
 & \times & & * & 7 & * \\
\hline
 & & * & * & * & * \\
 & 4 & 9 & 4 & 9 & \\
 & * & * & * & & \\
\hline
* & * & * & 4 & * & *
\end{array}$$

Poslední pomocný součin je součinem 707 a první číslice druhého součinitele. Přitom tento součin je trojmístný, tudíž ona číslice může být jedině 1,

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 7 & 0 & 7 \\
 & \times & & 1 & 7 & * \\
\hline
 & & * & * & * & * \\
 & 4 & 9 & 4 & 9 & \\
 & 7 & 0 & 7 & & \\
\hline
* & * & * & 4 & * & *
\end{array}$$

První pomocný součin je součinem 707 a třetí číslice druhého součinitele. Přitom tento součin je čtyřmístný, tudíž ona číslice musí být větší než 1. Po dosazení všech číslic od 2 do 9 a dopočítání příkladu zjišťujeme, že čtvrtá číslice ve výsledku je rovna 4, pouze když neznámá číslice je 6.

Úloha má jediné řešení, a to

$$\begin{array}{r} 7\,0\,7 \\ \times \quad 1\,7\,6 \\ \hline 4\,2\,4\,2 \\ 4\,9\,4\,9 \\ 7\,0\,7 \\ \hline 1\,2\,4\,4\,3\,2 \end{array}$$

Poznámka. Závěrečné zkoušení je možné urychlit tím, že se nejprve zaměříme na druhou číslici prvního pomocného součinu — z uvedeného lze snadno vyvodit, že to může být jedině 2.

Z7–I–5

Je dán trojúhelník ABC se stranami $|AB| = 3\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 10\,\mathrm{cm}$ a s úhlem ABC o velikosti $120°$. Narýsujte všechny body X tak, aby platilo, že trojúhelník BCX je rovnoramenný a současně trojúhelník ABX je rovnoramenný se základnou AB.

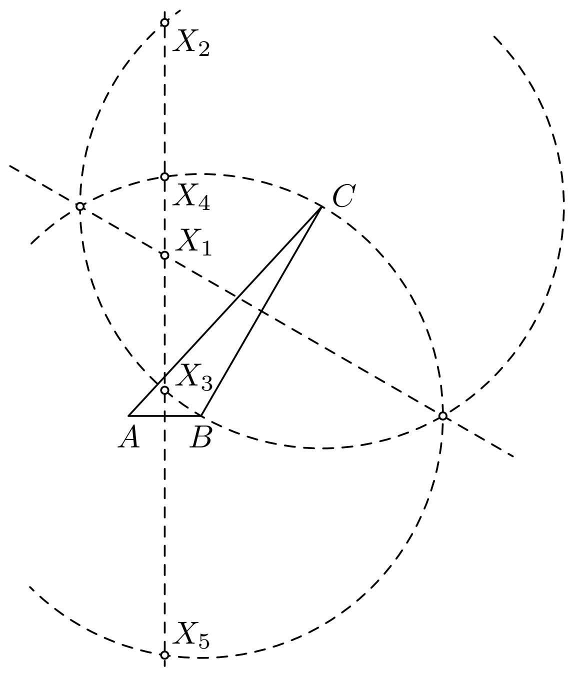
(*E. Semerádová*)

Nápověda. Uvědomte si, jak sestrojíte třetí vrchol trojúhelníku, znáte-li dva jeho vrcholy a velikosti dvou zbylých stran.

Možné řešení. Úsečka AB je základnou rovnoramenného trojúhelníku ABX, tedy $|XA| = |XB|$. Všechny body X s touto vlastností tvoří osu úsečky AB, tzn. kolmici jdoucí středem úsečky AB.

Pokud je úsečka BC základnou rovnoramenného trojúhelníku BCX, potom bod X musí ležet na ose úsečky BC. V takovém případě je bod X průsečíkem os úseček AB a BC (na obrázku označen jako X_1).

Pokud je úsečka BC ramenem rovnoramenného trojúhelníku BCX a úsečka BX jeho základnou, potom $|CB| = |CX|$. Všechny body X s touto vlastností tvoří kružnici, která má střed v bodě C a prochází bodem B. V takovém případě je bod X průsečíkem této kružnice a osy úsečky AB (dvě možnosti, na obrázku označeny X_2 a X_3).



Pokud je úsečka BC ramenem rovnoramenného trojúhelníku BCX a úsečka CX jeho základnou, potom $|BC| = |BX|$. Všechny body X s touto vlastností tvoří kružnici, která má střed v bodě B a prochází bodem C. V takovém případě je bod X průsečíkem této kružnice a osy úsečky AB (dvě možnosti, na obrázku označeny X_4 a X_5).

Úloha má celkem pět řešení vytnačených na obrázku.

Poznámky. Zvolené měřítko nemá vliv na hodnocení úlohy, zato však věnujte pozornost konstrukci osy úsečky.

Osa úsečky BC prochází společnými body vyznačených kružnic. Body X_4 a X_5 lze sestrojit také jako průsečíky kružnice se středem v bodě B procházející bodem C a kružnice s týmž poloměrem a středem v bodě A.

Z7–I–6

Určete, pro kolik přirozených čísel větších než 900 a menších než 1 001 platí, že ciferný součet ciferného součtu jejich ciferného součtu je roven 1. (*E. Semerádová*)

Nápověda. Jaký největší ciferný součet mají čísla od 900 do 1 001?

Možné řešení. Mezi čísly 900 a 1 001 má největší ciferný součet číslo 999, a to 27; většími součty se zabývat nemusíme.

Mezi čísly 1 a 27 má největší ciferný součet číslo 19, a to 10; většími součty se zabývat nemusíme.

Mezi čísly 1 a 10 mají ciferný součet 1 pouze čísla 1 a 10; ostatními čísly se zabývat nemusíme.

Nyní odzadu určíme všechna řešení (v prvním sloupci je 1 a v každém dalším sloupci jsou čísla, jejichž ciferný součet je roven číslu v sloupci předchozím):

1	1	1	1 000
		10	901
			910
	10	19	919
			928
			937
			946
			955
			964
			973
			982
			991

Čísel s uvedenými vlastnostmi je celkem 12.