I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Tři kamarádky veverky spolu vyrazily na sběr lískových oříšků. Zrzečka jich našla dvakrát víc než Pizizubka a Ouška dokonce třikrát víc než Pizizubka. Cestou domů si povídaly a přitom louskaly a jedly své oříšky. Pizizubka snědla polovinu všech oříšků, které nasbírala, Zrzečka třetinu všech svých oříšků a Ouška čtvrtinu těch svých. Doma veverky zjistily, že jim dohromady zbylo 196 oříšků.

Kolik oříšků našla každá z veverek? (*M. Petrová*)

Nápověda. Jakou část všech nalezených oříšků donesly veverky domů?

Možné řešení. Pokud množství oříšků, které našla Pizizubka, označíme x, potom Zrzečka našla $2x$ oříšků a Ouška $3x$ oříšků.

- Pizizubka snědla polovinu svých oříšků, zbylo jí $\frac{x}{2}$ oříšků.
- Zrzečka snědla třetinu svých oříšků, zbylo jí $\frac{2}{3} \cdot 2x = \frac{4}{3}x$ oříšků.
- Ouška snědla čtvrtinu svých oříšků, zbylo jí $\frac{3}{4} \cdot 3x = \frac{9}{4}x$ oříšků.

Všem veverkám dohromady zbylo

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{4}\right) x = \frac{49}{12}x$$

oříšků, což je podle zadání rovno 196. Tedy

$$\begin{aligned} \frac{49}{12}x &= 196, \\ \frac{x}{12} &= 4, \\ x &= 48. \end{aligned}$$

Pizizubka našla 48 oříšků, Zrzečka $2 \cdot 48 = 96$ oříšků a Ouška $3 \cdot 48 = 144$ oříšků.

Z8–I–2

Na každé stěně pravidelného osmistěnu je napsáno jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8, přičemž na různých stěnách jsou různá čísla. U každé stěny Jarda určil součet čísla na ní napsaného s čísly tří sousedních stěn. Takto dostal osm součtů, které také sečetl.

Jakých hodnot může tento výsledný součet nabývat? (*J. Zhouf*)

Nápověda. Kolikrát je každé číslo započítáno do celkového součtu?

Možné řešení. Číslo na každé stěně je započítáno celkem ve čtyřech dílčích součtech (každá stěna se počítá jednou jako prostřední a třikrát jako sousední). Proto je také ve výsledném součtu každé z čísel započítáno čtyřikrát. Výsledný součet tedy nabývá hodnoty

$$4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 4 \cdot 36 = 144,$$

a to nezávisle na tom, jak byla čísla na stěnách osmistěnu napsána.

Z8–I–3

Při střelbě z luku se mimo jiné sleduje výkonnost střelce. Ta se počítá tak, že se ze všech pokusů odebere jeden nejlepší a jeden nejhorší a z hodnocení zbylých se spočítá aritmetický průměr.

Kamarádi Petr, Jirka, Michal a Zdeněk stříleli po jenom šípu ve čtyřech kolech. Každá střela byla hodnocena celým číslem od 0 do 10. V každém kole byl součet hodnocení všech chlapců 32 bodů, ale ani v jednom kole neměli žádní dva chlapci stejné hodnocení.

V následující tabulce jsou vyplněny jen některé údaje z popsaného utkání, doplňte ty chybějící. (*M. Dillingerová*)

	1. kolo	2. kolo	3. kolo	4. kolo	výkonnost
Petr				5	10
Jirka			9	10	7,5
Michal			5		8
Zdeněk					8,5
celkem	32	32	32	32	–

Nápověda. Začněte s Petrem.

Možné řešení. Protože výkonnost Petra byla 10, musel nastřílet v prvních třech kolech po 10 bodech. Protože součet hodnocení ve 3. kole byl 32 bodů, musel Zdeněk v tomto kole trefit 8 bodů. Protože součet hodnocení ve 4. kole byl 32 bodů, musel být součet hodnocení Michala a Zdeňka v tomto kole 17 bodů. Protože v žádném kole neměli žádní dva chlapci stejné hodnocení, mohli mít v tomto kole

a) buď Michal 9 a Zdeněk 8 bodů,
b) nebo Michal 8 a Zdeněk 9 bodů.

Předpokládejme možnost a) a pokusme se doplnit tabulku

	1. kolo	2. kolo	3. kolo	4. kolo	výkonnost
Petr	10	10	10	5	10
Jirka			9	10	7,5
Michal			5	9	8
Zdeněk			8	8	8,5
celkem	32	32	32	32	–

Aby výkonnost Zdeňka byla $8{,}5 = 17 : 2$, musel v prvních dvou kolech trefit po 9 bodech. Aby výkonnost Michala byla $8 = 16 : 2$ a aby v žádném kole neměl stejné hodnocení jako Zdeněk, musel v prvních dvou kolech trefit po 8 bodech. Aby součet hodnocení v 1. i 2. kole byl 32 bodů, musel Jirka v těchto dvou kolech trefit po 5 bodech. V takovém případě by však jeho výkonnost nebyla 7,5 (ale jen 7). Možnost a) proto nemohla nastat.

Předpokládejme možnost b) a pokusme se doplnit tabulku

	1. kolo	2. kolo	3. kolo	4. kolo	výkonnost
Petr	10	10	10	5	10
Jirka			9	10	7,5
Michal			5	8	8
Zdeněk			8	9	8,5
celkem	32	32	32	32	–

Aby výkonnost Jirky byla $7{,}5 = 15 : 2$, musel v jednom z prvních dvou kol trefit 6 a ve druhém 6 nebo méně bodů. Aby výkonnost Michala byla $8 = 16 : 2$ a aby v žádném kole neměl stejné hodnocení jako Petr, musel v jednom z prvních dvou kol trefit 8 a ve druhém 8 nebo 9 bodů.

Kdyby Jirka trefil 6 bodů ve stejném kole jako Michal 8, potom by Zdeněk ve stejném kole musel trefit 8 bodů (aby byl součet hodnocení v tomto kole roven 32 bodů). To by však Michal a Zdeněk měli stejné hodnocení, proto tato možnost nastat nemohla.

Jirka tedy musel trefit 6 bodů v jiném kole než Michal 8. Předpokládejme, že tak učinil v 1. kole a pokusme se doplnit tabulku (z předchozího vyplývá, že Michal v tomtéž kole musel trefit 9 bodů)

	1. kolo	2. kolo	3. kolo	4. kolo	výkonnost
Petr	10	10	10	5	10
Jirka	6		9	10	7,5
Michal	9	8	5	8	8
Zdeněk			8	9	8,5
celkem	32	32	32	32	–

Aby součet hodnocení v 1. kole byl 32 bodů, musel Zdeněk v tomto kole trefit 7 bodů. Aby výkonnost Zdeňka byla $8{,}5 = 17 : 2$, musel ve druhém kole trefit 9 bodů. Aby součet hodnocení ve 3. kole byl 32 bodů, musel Jirka v tomto kole trefit 5 bodů. Protože 5 je menší než 6, souhlasí výkonnost Jirky se zadáním. Našli jsme jedno vyhovující řešení úlohy:

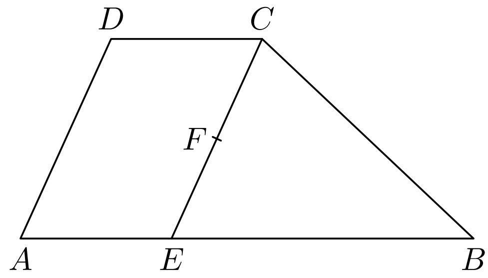
	1. kolo	2. kolo	3. kolo	4. kolo	výkonnost
Petr	10	10	10	5	10
Jirka	6	5	9	10	7,5
Michal	9	8	5	8	8
Zdeněk	7	9	8	9	8,5
celkem	32	32	32	32	–

Jirka ovšem mohl trefit 6 bodů ve 2. kole. V takovém případě by výsledná tabulka měla prohozena hodnocení u 1. a 2. kola.

Z8–I–4

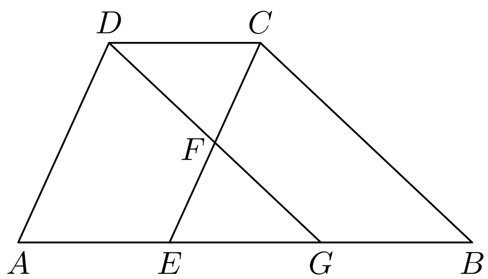
Lichoběžník $ABCD$ je úsečkou CE rozdělen na trojúhelník a rovnoběžník, viz obrázek. Bod F je středem úsečky CE, přímka DF prochází středem úsečky BE a obsah trojúhelníku CDE je $3\,\mathrm{cm}^2$.

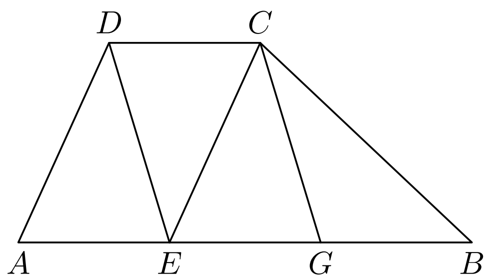
Určete obsah lichoběžníku $ABCD$. (*E. Semerádová*)



Nápověda. Porovnejte velikosti úseček AE a EB.

Možné řešení. Střed úsečky BE, kterým podle zadání prochází přímka DF, označíme G. Úsečka FG je střední příčkou trojúhelníku BCE, která je rovnoběžná se stranou BC. Zejména čtyřúhelník $GBCD$ je také rovnoběžníkem, a proto platí, že úsečky EG, GB, DC a AE jsou navzájem shodné.





Lichoběžník $ABCD$ tak můžeme rozdělit na čtyři trojúhelníky AED, DCE, EGC a GBC se stejným obsahem (první tři trojúhelníky jsou dokonce navzájem shodné). Obsah lichoběžníku je proto roven čtyřnásobku obsahu trojúhelníku CDE, tj.

$$4 \cdot 3 = 12\,\mathrm{cm}^2.$$

Poznámka. Trojúhelníky DFC a GFE jsou shodné, proto má rovnoběžník $AECD$ stejný obsah jako trojúhelník AGD, a ten je shodný s trojúhelníkem EBC. (V obou případech lze shodnost trojúhelníků zdůvodnit několika způsoby, např. podle věty *usu*.) Obsah lichoběžníku $ABCD$ je proto roven dvojnásobku obsahu rovnoběžníku $AECD$, a ten je roven dvojnásobku obsahu trojúhelníku CDE.

Z uvedeného také vyplývá, že obsah trojúhelníku EBC je čtyřnásobkem obsahu trojúhelníku DFC, a ten je roven polovině obsahu trojúhelníku CDE.

Z8–I–5

Maminka donesla 10 zákusků tří druhů: kokosek bylo méně než laskonek a nejvíc bylo karamelových kostek. Josef si vybral dva zákusky různých druhů, Jakub udělal totéž a na Jana zbyly pouze zákusky stejného druhu.

Kolik kokosek, laskonek a karamelových kostek maminka donesla? (*V. Hucíková*)

Nápověda. Jaký druh zákusků zbyl na Jana?

Možné řešení. Když se k zákuskům dostal Jan, bylo jich 6 stejného druhu, a to karamelových kostek — kdyby to byly kokosky nebo laskonky, muselo by kostek být víc než 6 a zákusků celkem by pak bylo víc než 10. Proto karamelových kostek původně bylo alespoň 6 a maminka přinesla

- buď 1 kokosku, 3 laskonky a 6 kostek,
- nebo 1 kokosku, 2 laskonky a 7 kostek.

První možnost není vyhovující — aby Josef i Jakub měli každý dva zákusky různých druhů, musel by alespoň jeden z nich vybrat také kostku, a to by jich pak na Jana nezbylo 6.

Druhá možnost je vyhovující — jeden z prvních dvou chlapců si vybral kokosku a laskonku, druhý laskonku a kostku, na Jana zbylo 6 kostek.

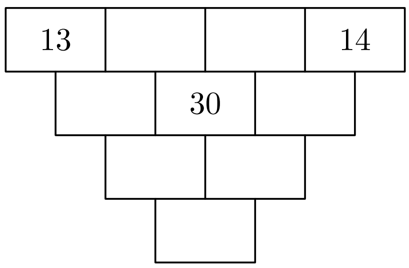
Maminka přinesla 1 kokosku, 2 laskonky a 7 karamelových kostek.

Z8–I–6

Každá cihlička následující pyramidy obsahuje jedno číslo. Kdykoli to je možné, je číslo v každé cihličce nejmenším společným násobkem čísel ze dvou cihliček ležících přímo na ní.

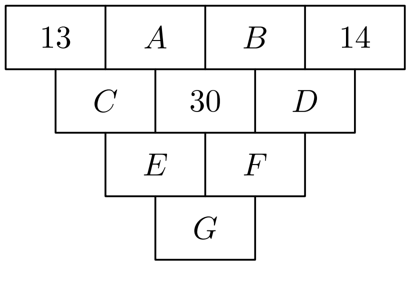
Které číslo může být v nejspodnější cihličce? Určete všechny možnosti.

(*A. Bohiniková*)



Nápověda. Jaký je nejmenší společný násobek tří čísel, z nichž jedno je dělitelem jiného?

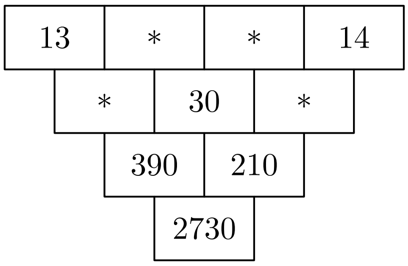
Možné řešení. Číslo 30 má celkem 8 dělitelů, jež mohou být dosazeny za A a B.



Číslo C je nejmenším společným násobkem 13 a A, číslo E je nejmenším společným násobkem C a 30, tedy E je nejmenším společným násobkem čísel 13, A a 30. Protože A je dělitelem čísla 30, je E nejmenším společným násobkem čísel 13 a 30, tj. $390 = 13 \cdot 30$.

Podobně lze zdůvodnit, že bez ohledu na hodnotu B, je F nejmenším společným násobkem čísel $14 = 2 \cdot 7$ a $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, tj. $210 = 7 \cdot 30$.

Číslo G v nejspodnější cihličce proto může být jedině nejmenším společným násobkem čísel 390 a 210, tj. $2\,730 = 7 \cdot 13 \cdot 30$.



Poznámka. Pokud bychom uvažovali všechny možné dvojice čísel, jejichž nejmenší společný násobek je 30, potom dostaneme celkem 27 možností. Doplňováním jednotlivých případů za A a B si každý dřív nebo později všimne, že čísla E, F, a tedy i G jsou stále stejná.