I. kolo kategorie Z9

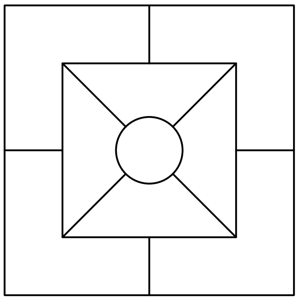
Z9–I–1

Ve všech devíti polích obrazce mají být vyplněna přirozená čísla tak, aby platilo:

- každé z čísel 2, 4, 6 a 8 je použito alespoň jednou,
- čtyři z polí vnitřního čtverce obsahují součiny čísel ze sousedících polí vnějšího čtverce,
- v kruhu je součet čísel ze sousedících polí vnitřního čtverce.

Zjistěte, které nejmenší a které největší číslo může být napsáno v kruhu.

(*M. Dillingerová*)



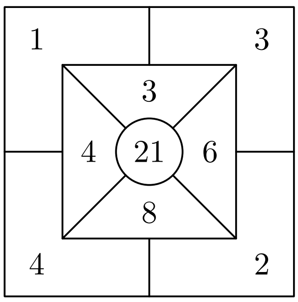
Nápověda. Může být číslo v kruhu menší než 20, resp. větší než 20 000?

Možné řešení. Pro dostatečně velké číslo v některém z rohových polí vnějšího čtverce mohou být odpovídající součiny ve vnitřním čtverci větší než libovolné předem zvolené číslo. Proto i součet v kruhu může být libovolně velký.

Zjistíme, jaký nejmenší součet může být v kruhu. Jistě to nemůže být žádné z předepsaných čísel: ani to největší z nich (8) totiž není větší než součet zbylých tří ($2+4+6 = 12$). Součet v kruhu proto musí být větší nebo roven součtu všech předepsaných čísel, tj. $2 + 4 + 6 + 8 = 20$.

Kdyby součet v kruhu byl 20, potom by předepsaná čísla musela být ve čtyřech sousedících polích malého čtverce. Protože jedno z těchto čísel je 6, muselo by být jedno ze sousedících polí vnějšího čtverce 6 nebo 3, a to by také musel být dělitel druhého sousedícího pole vnitřního čtverce. Žádné z čísel 2, 4 a 8 však takového dělitele nemá, proto tato možnost nastat nemůže.

Součet v kruhu proto musí být větší nebo roven 21. Následující vyplnění dokazuje, že nejmenší číslo, které může být v kruhu napsáno, je 21.



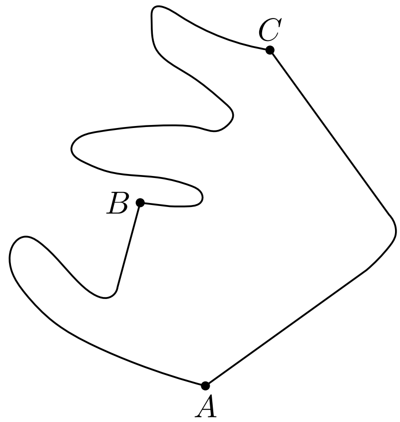
Poznámka. Všimněte si, že číslo v kruhu je vždy součinem součtů dvojic protilehlých čísel vnějšího čtverce. Tento poznatek lze také využít při řešení úlohy.

Z9–I–2

Z bodu A do bodu C vede naučná stezka procházející bodem B a jinudy také červená turistická značka, viz obrázek. Kromě toho lze použít také nezakreslenou zkratku dlouhou 1 500 metrů začínající v A a ústící na naučné stezce. Vojtěch zjistil, že

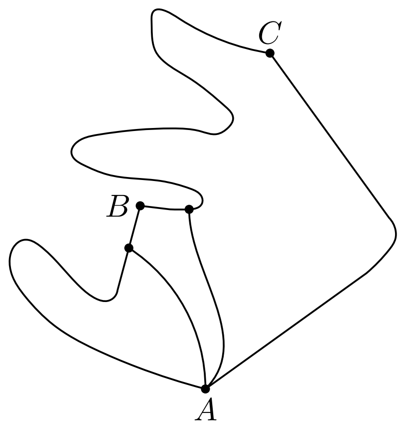
1. výlet z A po červené do C a po naučné stezce zpět do A je dlouhý 7 700 metrů,
2. výlet z B po naučné stezce do C a pak po červené do A je dlouhý 5 800 metrů,
3. s využitím zkratky je cesta z A do B dlouhá 1 700 metrů,
4. výlet z A po naučné stezce do C a zpět do A nejprve po naučné stezce a poté po zkratce je dlouhý 8 800 metrů.

Určete délku naučné stezky z A do C. Pokud zadání připouští více odpovědí, uveďte všechny. (*L. Šimůnek*)



Nápověda. Zjistěte, kde mohla ústit zkratka na naučnou stezku.

Možné řešení. Zkratka mohla ústit na naučnou stezku buď v úseku mezi A a B, nebo v úseku mezi B a C.



Zkratka byla dlouhá 1 500 m a s jejím využitím byla cesta z A do B (podle 3. informace) dlouhá 1 700 m. Vzdálenost B od ústí zkratky proto byla v obou případech stejná, a to

$$1\,700 - 1\,500 = 200\,(\mathrm{m}).$$

Z 1. a 2. informace plyne, že cesta z A do B po naučné stezce byla dlouhá

$$7\,700 - 5\,800 = 1\,900\,(\mathrm{m}).$$

Pokud délku úseku naučné stezky mezi B a C označíme y, potom s využitím 4. informace dostáváme dvě různé rovnice podle toho, kde ústí zkratka:

a) Pro ústí v úseku mezi A a B platí

$$\begin{aligned} 1\,900 + 2y + 200 + 1\,500 &= 8\,800, \\ 2y &= 5\,200, \\ y &= 2\,600\,(\mathrm{m}). \end{aligned}$$

V tomto případě byla celá naučná stezka dlouhá

$$1\,900 + 2\,600 = 4\,500\,(\mathrm{m}).$$

b) Pro ústí v úseku mezi B a C platí

$$\begin{aligned} 1\,900 + 2y - 200 + 1\,500 &= 8\,800, \\ 2y &= 5\,600, \\ y &= 2\,800\,(\mathrm{m}). \end{aligned}$$

V tomto případě byla celá naučná stezka dlouhá

$$1\,900 + 2\,800 = 4\,700\,(\mathrm{m}).$$

Poznámka. Pokud délku úseku naučné stezky mezi A a B označíme x, mezi B a ústím zkratky z a délku červené cesty mezi A a C označíme w, potom informace ze zadání lze zapsat pomocí rovnic takto:

1. $w + y + x = 7\,700$,
2. $y + w = 5\,800$,
3. $1\,500 + z = 1\,700$,
4. $x + 2y + z + 1\,500 = 8\,800$, resp. $x + 2y - z + 1\,500 = 8\,800$.

V předchozím je představeno postupné řešení této soustavy pro neznámé z, x a y (a následné vyjádření součtu $x+y$). Ze druhé rovnice lze vyjádřit také hodnotu neznámé w.

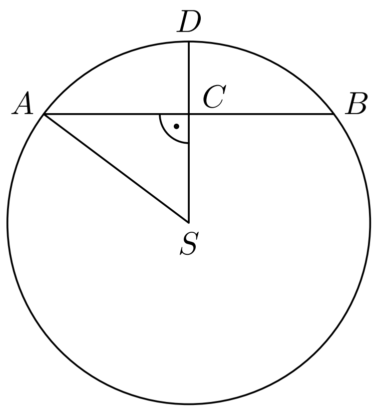
Z9–I–3

Julince se zakutálel míček do bazénu a plaval ve vodě. Jeho nejvyšší bod byl 2 cm nad hladinou. Průměr kružnice, kterou vyznačila hladina vody na povrchu míčku, byl 8 cm.

Určete průměr Julinčina míčku. (*L. Hozová*)

Nápověda. Jaký je vztah mezi poloměrem míčku, poloměrem kružnice vyznačené hladinou a vzdáleností středu míčku od hladiny?

Možné řešení. Následující obrázek znázorňuje řez míčku, který prochází jeho středem (bod S) a je kolmý k hladině (přímka AB). Bod C je patou kolmice z bodu S k hladině a bod D je nejvyšším bodem míčku nad hladinou.



Ze zadání víme, že $|AC| = 4\,\mathrm{cm}$ a $|CD| = 2\,\mathrm{cm}$. Poloměr míčku $|SA| = |SD|$ označíme r. Podle Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku ACS dostáváme:

$$\begin{aligned} r^2 &= 4^2 + (r-2)^2, \\ r^2 &= 16 + r^2 - 4r + 4, \\ 4r &= 20, \\ r &= 5. \end{aligned}$$

Julinčin míček měl průměr 10 cm.

Z9–I–4

Katka si myslela pětimístné přirozené číslo. Do sešitu napsala na první řádek součet myšleného čísla a poloviny myšleného čísla. Na druhý řádek napsala součet myšleného čísla a pětiny myšleného čísla. Na třetí řádek napsala součet myšleného čísla a devítiny myšleného čísla. Nakonec sečetla všechna tři zapsaná čísla a výsledek napsala na čtvrtý řádek. Poté s úžasem zjistila, že na čtvrtém řádku má zapsánu třetí mocninu jistého přirozeného čísla.

Určete nejmenší číslo, které si Katka mohla myslet na začátku. (*L. Růžičková*)

Nápověda. Vyjádřete součet na čtvrtém řádku pomocí původně myšleného čísla.

Možné řešení. Pokud myšlené pětimístné číslo označíme x, potom na prvních třech řádcích byla napsána čísla $x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x$, $x + \frac{1}{5}x = \frac{6}{5}x$ a $x + \frac{1}{9}x = \frac{10}{9}x$. Součet na čtvrtém řádku byl roven

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{6}{5} + \frac{10}{9}\right) x = \frac{343}{90} x.$$

Tento výsledek má být třetí mocninou jistého přirozeného čísla, takže je sám přirozeným číslem. Jelikož čísla 343 a 90 jsou nesoudělná, musí být x násobkem 90. Jelikož 343 je třetí mocninou 7, musí být $\frac{1}{90}x$ třetí mocninou nějakého přirozeného čísla.

Nejmenším násobkem 90, který je pětimístný, je $10\,080 = 90 \cdot 112$; proto $\frac{1}{90}x \geqq 112$. Nejmenší třetí mocninou nějakého přirozeného čísla, která je větší než nebo rovna 112, je $125 = 5^3$; proto $\frac{1}{90}x = 125$.

Nejmenší číslo, které si Katka mohla myslet, je $90 \cdot 125 = 11\,250$.

Z9–I–5

Myšky si postavily podzemní domeček sestávající z komůrek a tunýlků:

- každý tunýlek vede z komůrky do komůrky (tzn. žádný není slepý),
- z každé komůrky vedou právě tři tunýlky do tří různých komůrek,
- z každé komůrky se lze tunýlky dostat do kterékoli jiné komůrky,
- v domečku je právě jeden tunýlek takový, že jeho zasypáním se domeček rozdělí na dvě oddělené části.

Kolik nejméně komůrek mohl mít myší domeček? Načrtněte, jak mohly být komůrky pospojovány. (*K. Jasenčáková*)

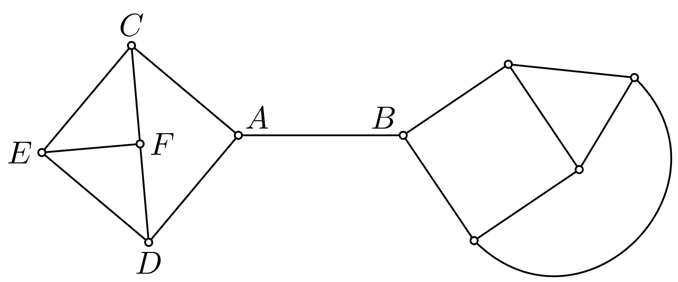
Nápověda. Začněte kritickým tunýlkem.

Možné řešení. Komůrky budeme značit kroužky, tunýlky čárami. Začneme kritickým tunýlkem, jehož zasypáním se domeček rozdělí na dvě oddělené části. Pokud komůrky na koncích tohoto tunýlku označíme A a B, potom každá komůrka patří do právě jedné z následujících dvou skupin:

a) komůrka A a všechny komůrky, do kterých se z ní lze dostat bez použití tunýlku AB,
b) komůrka B a všechny komůrky, do kterých se z ní lze dostat bez použití tunýlku BA.

To znamená, že žádná komůrka z jedné skupiny není spojena tunýlkem s žádnou komůrkou z druhé skupiny. Nyní určíme, kolik nejméně komůrek může být v jedné skupině, aby byly splněny ostatní podmínky:

- Aby z komůrky A vedly tři tunýlky, musí být ve skupině a) alespoň dvě další komůrky, které označíme C a D. Tři komůrky ve skupině však nestačí — lze spojit jedině C a D, a to by z C a D vedly pouze dva tunýlky.
- Proto ve skupině a) musí být alespoň jedna další komůrka, kterou označíme E. Čtyři komůrky však také nestačí — E lze spojit jedině s C a D, a to by z E vedly pouze dva tunýlky.
- Proto ve skupině a) musí být alespoň jedna další komůrka, kterou označíme F. Pět komůrek v jedné skupině už stačí — komůrky mohou být pospojovány např. takto:



Domeček měl nejméně 10 komůrek.

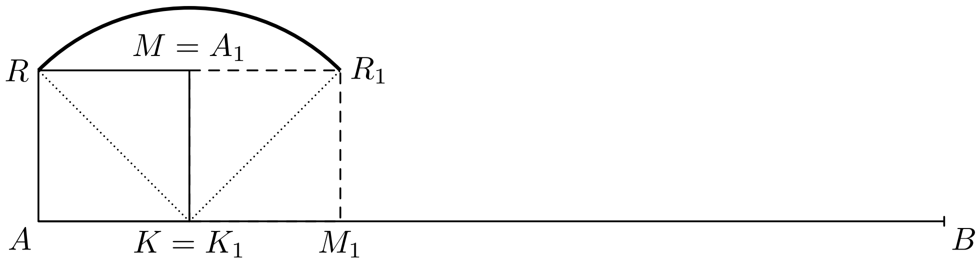
Z9–I–6

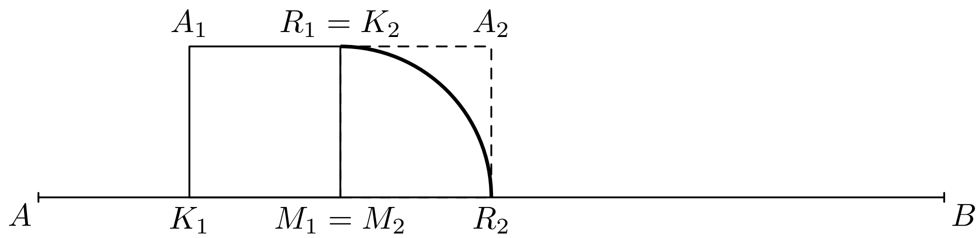
Je dána úsečka AB délky 12 cm, na níž je jednou stranou položen čtverec $MRAK$ se stranou délky 2 cm, viz obrázek. $MRAK$ se postupně překlápí po úsečce AB, přičemž bod R zanechává na papíře stopu.

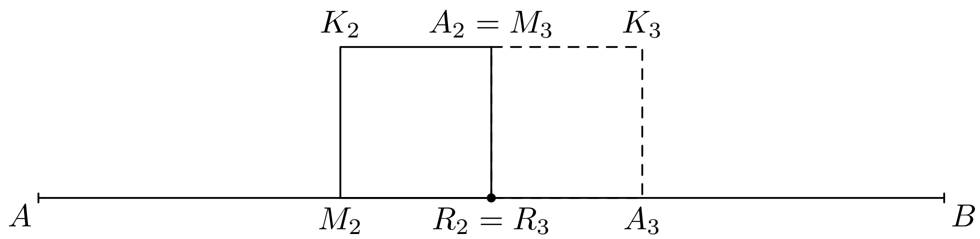
Narýsujte celou stopu bodu R, dokud čtverec neobejde úsečku AB z obou stran a nevrátí se do své původní polohy. (*M. Dillingerová*)

Nápověda. Rozdělte si úkol na etapy.

Možné řešení. Čtverec se postupně překlápí okolo bodů na úsečce AB (na následujících obrázcích to jsou body K, M_1, R_2, A_3, atd.). V každé etapě se bod R pohybuje po části kružnice, jejíž střed je v některém z vyznačených bodů a poloměr je roven buď straně, nebo úhlopříčce čtverce.

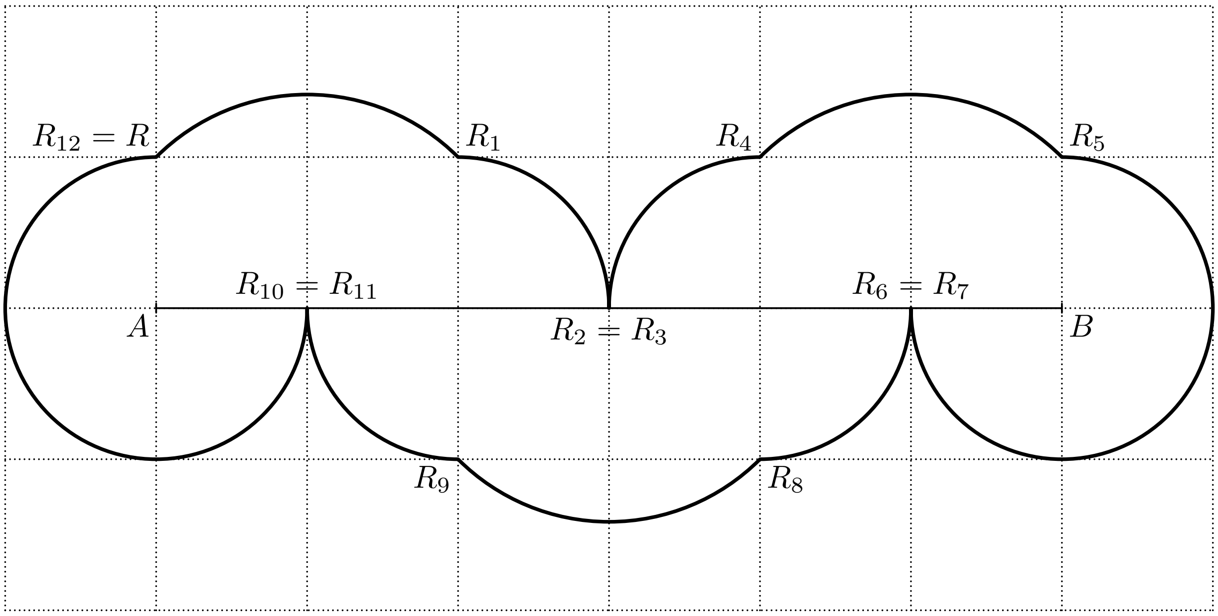






Části kružnic jsou většinou čtvrtkružnice (což odpovídá velikosti vnitřního úhlu čtverce), pouze v krajních bodech úsečky to jsou třičtvrtěkružnice (což odpovídá velikosti vnějšího úhlu čtverce).

K narýsování celé stopy bodu R potřebujeme středy kružnic ($K = K_1$, $M_1 = M_2$, $R_2 = R_3$ atd.), které jsou na úsečce AB po 2 cm. Společné body kružnic ($R_1 = K_2$, $R_2 = R_3$, $K_3 = R_4$ atd.) leží v uzlových bodech čtverečkové sítě se stranou 2 cm.


$R_{12} = R$
R_1
R_4
R_5
$R_{10} = R_{11}$
$R_6 = R_7$
A
$R_2 = R_3$
B
R_9
R_8