I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Anička a Blanka si napsaly každá jedno dvojmístné číslo, které začínalo sedmičkou. Dívky si zvolily různá čísla. Poté každá mezi obě číslice vložila nulu, takže jim vzniklo trojmístné číslo. Od něj každá odečetla svoje původní dvojmístné číslo. Výsledek je překvapil.

Určete, jak se jejich výsledky lišily. (*L. Hozová*)

Nápověda. Vyzkoušejte popsaný postup s několika konkrétními čísly.

Možné řešení. Dvojmístné číslo začínající sedmičkou je tvaru 7$*$, kde místo hvězdičky může být libovolná číslice. Vložením nuly dostáváme trojmístné číslo tvaru 70$*$. Bez ohledu na to, jakou číslici zastupuje hvězdička na místě jednotek, rozdíl vychází

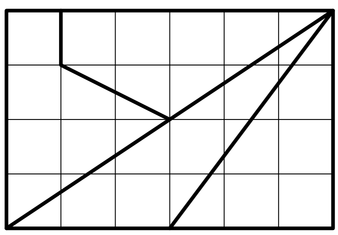
$$\begin{array}{rrrr} & 7 & 0 & * \\ - & & 7 & * \\ \hline & 6 & 3 & 0 \end{array}$$

Výsledky Aničky a Blanky se nijak nelišily, oběma vyšlo 630.

Z6–I–2

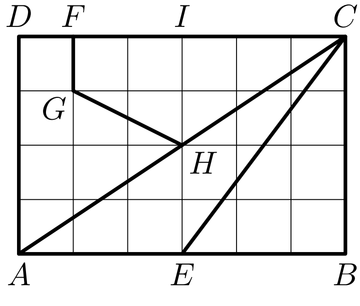
Erika chtěla nabídnout čokoládu svým třem kamarádkám. Když ji vytáhla z batohu, zjistila, že je polámaná jako na obrázku. (Vyznačené čtverečky jsou navzájem shodné.) Dívky se dohodly, že čokoládu dále lámat nebudou a losem určí, jak velký kousek která dostane.

Seřaďte čtyři kousky čokolády od nejmenšího po největší. (*K. Jasenčáková*)



Nápověda. Umíte porovnat jednotlivé kousky bez počítání?

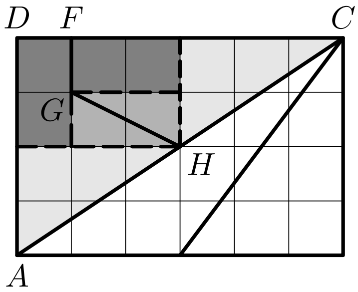
Možné řešení. Nejprve označíme několik pomocných vrcholů jako na obrázku:



Úsečka AC je úhlopříčkou obdélníku $ABCD$, a ta dělí obdélník na dvě stejné části. Jedna část je tvořena trojúhelníky AEC a EBC, druhá část je tvořena mnohoúhelníky $AHGFD$ a $CFGH$.

Trojúhelník ABC je polovinou obdélníku $ABCD$. Trojúhelník EBC je polovinou obdélníku $EBCI$, a ten je polovinou obdélníku $ABCD$. Proto má trojúhelník EBC poloviční obsah v porovnání s trojúhelníkem ABC a trojúhelníky EBC a AEC tak mají stejný obsah.

Mnohoúhelníky $AHGFD$ a $CFGH$ lze rozdělit na menší části, které jsou po dvojicích shodné, viz čárkované čáry na následujícím obrázku. Proto mají také tyto dva mnohoúhelníky stejný obsah.

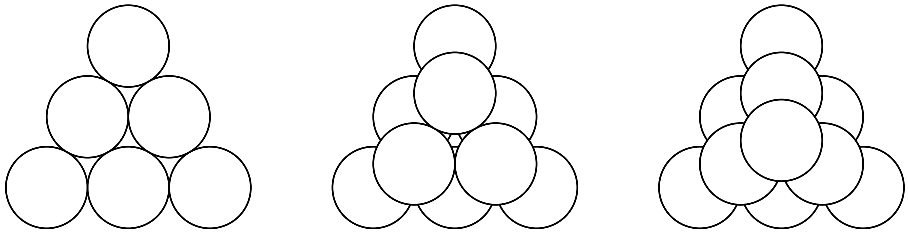


Všechny čtyři mnohoúhelníky tedy mají stejný obsah, neboli všechny čtyři kousky čokolády jsou stejně velké.

Poznámka. Vyjádření obsahů jednotlivých kousků pomocí vyznačených čtverečků vypadá takto: celý obdélník má obsah $6 \times 4 = 24$ čtverečků, každý z trojúhelníků AEC a EBC má obsah $\frac{1}{2}(3 \times 4) = 6$ čtverečků, každý z mnohoúhelníků $AHGFD$ a $CFGH$ má obsah $3 + 2 + 1 = 6$ čtverečků (odvozeno z předchozího dělení).

Z6–I–3

Honza měl 100 stejných zavařovacích sklenic, z kterých si stavěl trojboké pyramidy. Nejvyšší poschodí pyramidy má vždy jednu sklenici, druhé poschodí shora představuje rovnostranný trojúhelník, jehož strana sestává ze dvou sklenic, atd. Příklad konstrukce trojposchoďové pyramidy je na obrázku.



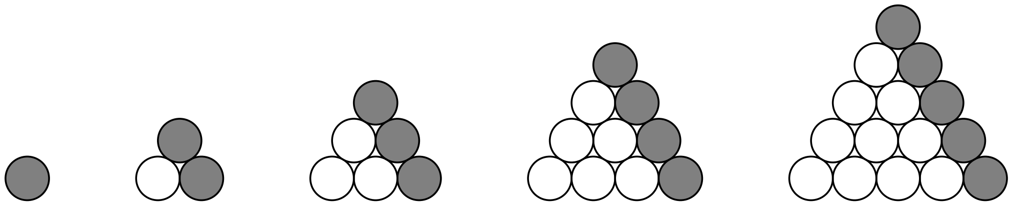
1. poschodí — 1. a 2. poschodí — tříposchoďová pyramida

1. Kolik sklenic Honza potřeboval na pětiposchoďovou pyramidu?
2. Kolik poschodí měla pyramida, na niž bylo použito co nejvíc Honzových sklenic?

(*K. Jasenčáková*)

Nápověda. Jak se liší počty sklenic v sousedních patrech?

Možné řešení. 1. Sklenice budeme počítat po poschodích shora. Ze zadání a návodných obrázků víme, že v pátém (nejvyšším) poschodí je 1 sklenice, ve čtvrtém poschodí jsou 3 sklenice, ve třetím poschodí je 6 sklenic. Každé další (nižší) poschodí si lze představit tak, že se k předcházejícímu (vyššímu) poschodí přidá jedna řada sklenic:



Na pětiposchoďovou pyramidu Honza potřeboval

$$1 + \underbrace{1 + 2}_{3} + \underbrace{1 + 2 + 3}_{6} + \underbrace{1 + 2 + 3 + 4}_{10} + \underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + 5}_{15} = 35 \text{ sklenic.}$$

2. Se stejným nápadem jako v předchozím odstavci budeme pracovat dále, dokud nevyčerpáme maximum ze sta použitelných sklenic: na šestipatrovou pyramidu je potřeba

$$35 + \underbrace{15 + 6}_{21} = 56 \text{ sklenic,}$$

na sedmipatrovou pyramidu je potřeba

$$56 + \underbrace{21 + 7}_{28} = 84 \text{ sklenic,}$$

na osmipatrovou pyramidu je potřeba

$$84 + \underbrace{28 + 8}_{36} = 120 \text{ sklenic.}$$

Se stem sklenic lze postavit nejvýše sedmipatrovou pyramidu.

Z6–I–4

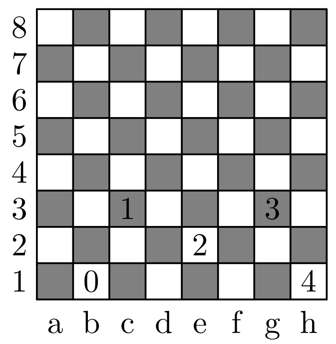
Veronika má klasickou šachovnici s 8×8 políčky. Řádky jsou označeny číslicemi 1 až 8, sloupce písmeny a až h. Veronika položila na políčko b1 koně, se kterým lze pohybovat pouze tak jako v šachu.

1. Je možné přemístit koně ve čtyřech tazích na políčko h1?
2. Je možné přemístit koně v pěti tazích na políčko e6?

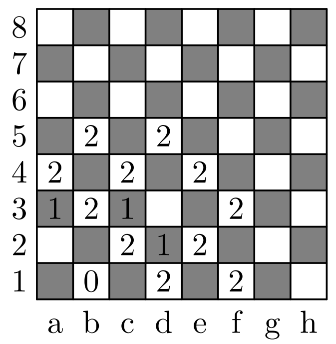
Pokud ano, popište všechny možné posloupnosti tahů. Pokud ne, zdůvodněte, proč to možné není. (*K. Jasenčáková*)

Nápověda. Označte si postupně políčka, na které lze koně přemístit po prvním tahu, po druhém tahu atd.

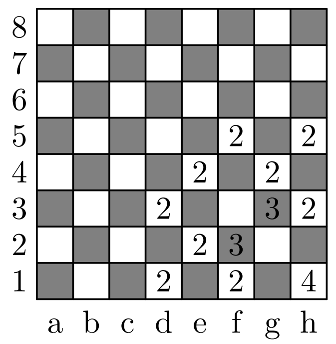
Možné řešení. 1. Po chvíli zkoušení zjistíme, že doskákat s koněm z políčka b1 na políčko h1 ve čtyřech tazích lze např. takto: c3, e2, g3, h1, viz obrázek.



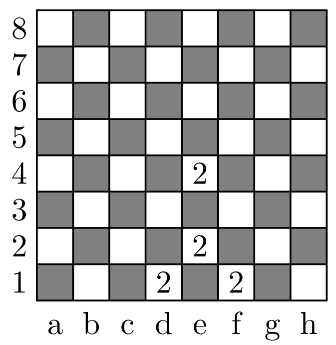
Abychom doplnili všechny posloupnosti tahů mezi těmito políčky a na žádnou možnost nezapomněli, budeme postupovat následovně. Určíme všechna políčka, na která lze koně z b1 přemístit po prvním a po druhém tahu:



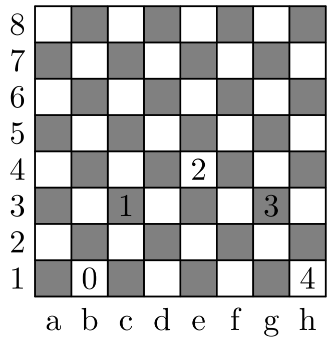
Určíme všechna políčka, na kterých musí kůň stát po třetím a po druhém tahu, aby po čtvrtém tahu skončil na h1:

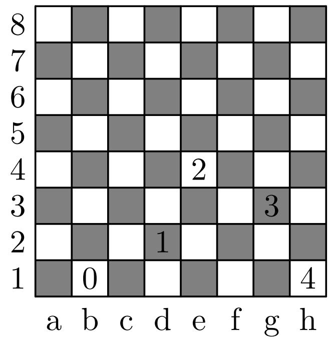


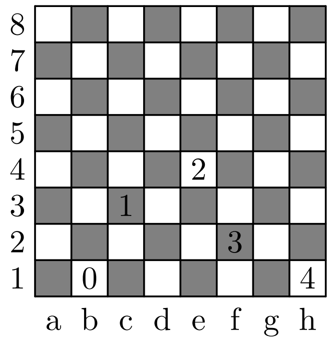
Určíme průnik předchozích dvou situací po druhém tahu:

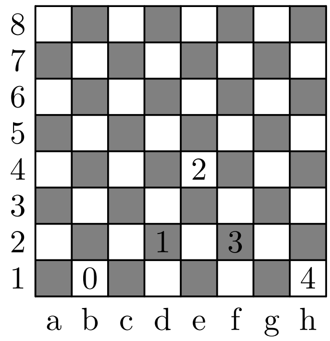


Možnost s koněm po druhém tahu na e2 je jedna, a to je právě výše uvedené řešení. Možnosti s koněm po druhém tahu na e4 jsou čtyři:

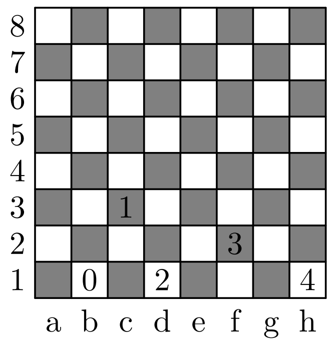


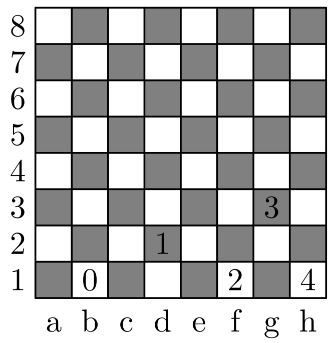






Možnost s koněm po druhém tahu na d1 je jedna, stejně jako možnost s koněm po druhém tahu na f1:





2. Snadno lze najít také cestu z políčka b1 na políčko e6 ve čtyřech tazích, ale v pěti už ne. Důvodem je to, že barva políčka, na kterém kůň stojí, se při každém jeho tahu mění (jeden tah koně má dvě části: delší část je o dvě políčka, a při tom se barva zachovává, kratší část je o jedno políčko, a při tom se barva mění):

Výchozí políčko b1 je bílé, po prvním tahu bude kůň stát na černém políčku, po druhém tahu bude opět na bílém atd. — po lichém počtu tahů bude na černém políčku, po sudém počtu tahů bude na bílém políčku. Políčko e6 je bílé a 5 je liché číslo, proto nelze přemístit koně z b1 na e6 v pěti tazích.

Poznámka. Sedm možných řešení v první části úlohy lze nalézt náhodným zkoušením a následně se zamýšlet nad zdůvodněním, že jsou tato řešení všechna. Při hodnocení buďte shovívaví, i ne zcela úplná zdůvodnění lze hodnotit stupněm 1. Avšak komentáře neobsahující žádné vysvětlení hodnoťte nanejvýš stupněm 2.

Z6–I–5

V plechovce byly červené a zelené bonbóny. Čeněk snědl $\frac{2}{5}$ všech červených bonbónů a Zuzka snědla $\frac{3}{5}$ všech zelených bonbónů. Teď tvoří červené bonbóny $\frac{3}{8}$ všech bonbónů v plechovce.

Kolik nejméně bonbónů mohlo být původně v plechovce? (*L. Růžičková*)

Nápověda. Kolik bonbónů té které barvy mohlo, resp. nemohlo být původně v plechovce?

Možné řešení. Jak Čeněk, tak Zuzka snědli několik pětin bonbónů příslušné barvy. Proto musí být původní počet jak červených, tak zelených bonbónů dělitelný pěti. Budeme jako původní počet červených bonbónů uvažovat co nejmenší čísla dělitelná pěti a zkusíme vyjádřit počet zelených bonbónů:

- Pokud by červených bonbónů bylo původně 5, zbyly by z nich po ujídání 3. Tyto 3 bonbóny by měly tvořit $\frac{3}{8}$ všech zbylých bonbónů, tedy všech zbylých bonbónů by bylo 8 a zbylých zelených by tak bylo 5. Těchto 5 bonbónů by mělo tvořit zbylé $\frac{2}{5}$ všech zelených, což nelze.
- Pokud by červených bonbónů bylo původně 10, zbylo by z nich po ujídání 6. Těchto 6 bonbónů by mělo tvořit $\frac{3}{8}$ všech zbylých bonbónů, tedy všech zbylých bonbónů by bylo 16 a zbylých zelených by tak bylo 10. Těchto 10 bonbónů by mělo tvořit zbylé $\frac{2}{5}$ všech zelených, takže všech zelených by původně bylo 25.

Nejmenší počet bonbónů, které mohly být původně v plechovce, je $10 + 25 = 35$.

Jiná nápověda. Jakou část zbylých bonbónů tvořily zelené bonbóny?

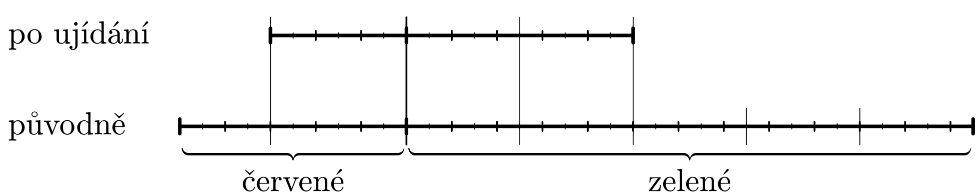
Jiné řešení. Červené bonbóny tvořily po ujídání $\frac{3}{8}$ všech bonbónů, zelené bonbóny tak tvořily $\frac{5}{8}$ všech zbylých bonbónů, proto počet zbylých zelených bonbónů musí být dělitelný pěti.

Zuzka snědla $\frac{3}{5}$ zelených bonbónů, v plechovce tak zbyly $\frac{2}{5}$ původního počtu zelených bonbónů, proto počet zbylých zelených bonbónů musí být dělitelný také dvěma. Celkem dostáváme, že počet zbylých zelených bonbónů musí být dělitelný deseti.

Nejmenší možný počet zbylých zelených bonbónů je 10. V takovém případě by původní počet zelených bonbónů byl 25, počet zbylých červených bonbónů 6 a původní počet červených bonbónů 10.

Nejmenší počet bonbónů, které mohly být původně v plechovce, je $10 + 25 = 35$.

Poznámka. Předchozí úvahy je možné graficky znázornit takto:



Pomocí neznámých c, resp. z, které označují původní počty červených, resp. zelených bonbónů, je možné úlohu zformulovat takto:

$$\frac{3}{5}c = \frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}c + \frac{2}{5}z\right),$$

kde c a z jsou čísla dělitelná pěti a $\frac{3}{5}c+\frac{2}{5}z$ je dělitelné osmi. Předchozí vyjádření lze upravit na

$$8c = 3c + 2z, \quad \text{neboli} \quad 5c = 2z.$$

Nejmenší c a z vyhovující všem uvedeným požadavkům jsou $c = 2 \cdot 5 = 10$ a $z = 5 \cdot 5 = 25$.

Z6–I–6

Sestrojte libovolnou úsečku DS, pak sestrojte kružnici k se středem v bodě S, která prochází bodem D.

1. Sestrojte rovnostranný trojúhelník DAS, jehož vrchol A leží na kružnici k.
2. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC, jehož vrcholy B a C také leží na kružnici k.

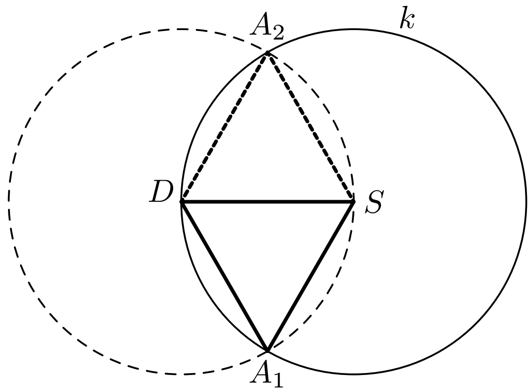
(*L. Růžičková*)

Nápověda. Co všechno víte o rovnostranných trojúhelnících?

Možné řešení. 1. Úsečky AS a AD mají být shodné s danou úsečkou DS. Tedy

- bod A sestrojíme jako průsečík kružnice k a kružnice se středem D a poloměrem DS.

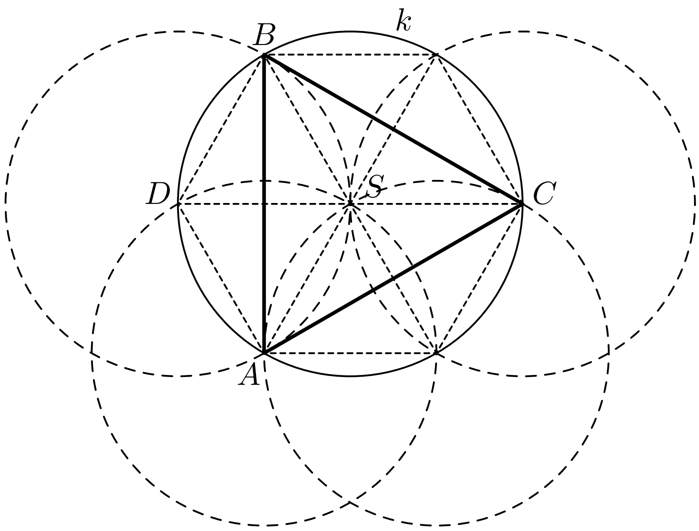
  Takové body jsou dva.



2. Pro trojúhelník ABC s vrcholy na kružnici k platí, že druhé průsečíky přímek AS, BS a CS s kružnicí k jsou středově souměrné s body A, B a C podle středu S. Je-li trojúhelník ABC rovnostranný, je rovnostranný i tento středově souměrný trojúhelník. Všech šest bodů na kružnici k pak tvoří vrcholy pravidelného šestiúhelníku. Pravidelný šestiúhelník je tvořen šesti shodnými rovnostrannými trojúhelníčky, z nichž dva jsou sestrojeny v první části úlohy. Úsečka A_1A_2 na předchozím obrázku je proto jednou ze stran hledaného trojúhelníku:

- jeden z bodů A_1, A_2 v první části úlohy označíme A, druhý označíme B,
- bod C sestrojíme jako průsečík kružnice k s přímkou DS.

Alternativně lze bod C sestrojit jako průsečík kružnice k s kružnicí se středem v bodě A, příp. B a poloměrem AB. Na následujícím obrázku je naznačeno ještě jiné řešení založené na doplnění pravidelného šestiúhelníku opakováním konstrukce z první části úlohy.


k
B
D
S
C
A