I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Vyjádřete číslo milion pomocí čísel obsahujících pouze číslice 9 a algebraických operací plus, minus, krát, děleno, mocnina a odmocnina. Určete alespoň tři různá řešení.

(*L. Dedková*)

Nápověda. Vyjádřete uvedeným způsobem co nejvíce malých přirozených čísel, která by se mohla dále hodit.

Možné řešení. Přirozená čísla obsahující pouze číslice 9 jsou 9, 99, 999, 9 999 atd. Náhodné operace s těmito čísly vychází všelijak, ale můžeme si všimnout např. následujících výsledků:

$$\frac{9}{9}=1,\quad \sqrt{9}=3,\quad 9+9=18,\quad 99-9=90\quad \text{apod.}$$

V dalším kroku umíme vyjádřit číslo 10, a to např. takto:

$$10=9+\frac{9}{9}=\frac{9\cdot 9+9}{9}=\frac{99-9}{9}.$$

Obdobně lze vyjádřit 100, 1 000 atd., tedy i milion:

$$1\,000\,000=999\,999+\frac{9}{9}=\frac{999\,999\cdot 9+9}{9}=\frac{9\,999\,999-999\,999}{9}.$$

Z dalších nápadů z prvního kroku můžeme vyjádřit např.

$$2=\frac{9}{9}+\frac{9}{9}=\frac{9+9}{9},\quad 6=9-\sqrt{9}=\frac{9+9}{\sqrt{9}}\quad \text{apod.}$$

Odtud lze vyjádřit milion mnoha dalšími způsoby, např. takto:

$$1\,000\,000=\left(9+\frac{9}{9}\right)^{9-\sqrt{9}}.$$

Poznámka. Pomocí $\frac{9}{9}=1$ lze vyjádřit milion také jako součet milionu těchto zlomků. Tento a podobné nápady však není možné hodnotit, pokud nejsou realizovány výše popsaným způsobem (tedy beze slov nebo teček naznačujících pokračování jisté myšlenky).

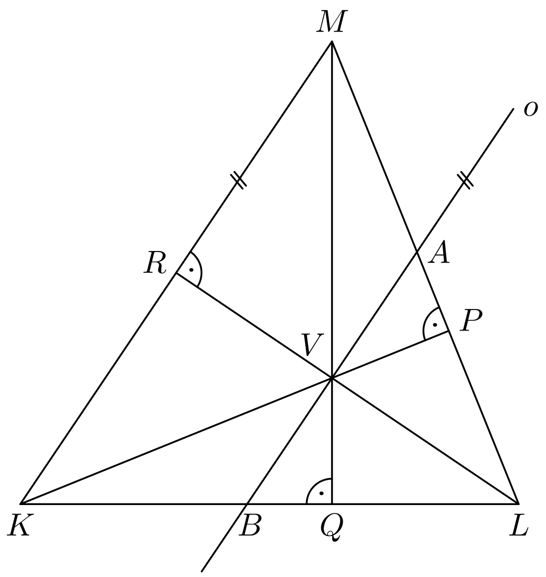
Z8–I–2

V ostroúhlém trojúhelníku KLM má úhel KLM velikost 68°. Bod V je průsečíkem výšek a P je patou výšky na stranu LM. Osa úhlu PVM je rovnoběžná se stranou KM.

Porovnejte velikosti úhlů MKL a LMK. (*L. Hozová*)

Nápověda. Uvažte osovou souměrnost podle výšky na stranu KM.

Možné řešení. Na následujícím obrázku jsou znázorněny údaje ze zadání, navíc paty všech výšek (body P, Q, R) a průsečíky osy úhlu PVM se stranami trojúhelníku (body A, B):



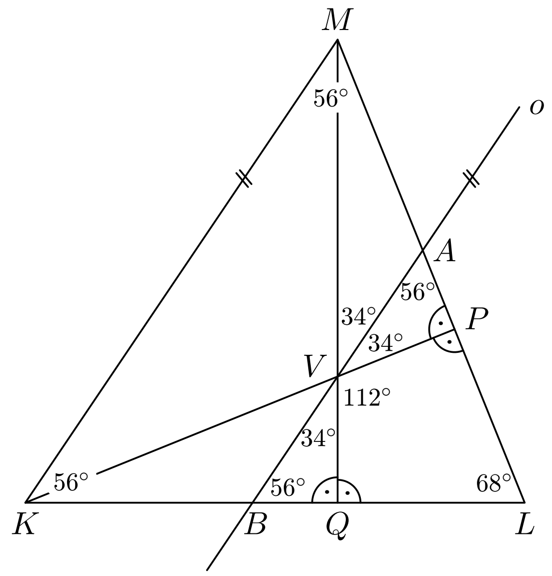
Osa úhlu PVM je rovnoběžná se stranou KM, zejména obě tyto přímky jsou kolmé k výšce LR. Tedy při osové souměrnosti podle přímky LR se jak přímka KM, tak přímka AB zobrazuje sama na sebe. Úhly PVM a QVK jsou shodné (vrcholové úhly) a osa úhlu PVM je též osou úhlu QVK, zejména úhly AVM a BVK jsou shodné. Při osové souměrnosti podle přímky LR se tak přímka PK zobrazuje na přímku QM, tedy bod K se zobrazuje na bod M. Celkem zjišťujeme, že trojúhelník KLM je souměrný podle výšky LR. Proto jsou úhly MKL a LMK shodné.

Jiná nápověda. Porovnejte úhly, které vymezuje osa úhlu PVM se stranami KL a LM.

Jiné řešení. Úhly PVM a QVK jsou shodné (vrcholové úhly). Osa úhlu PVM je též osou úhlu QVK, zejména úhly PVA a QVB jsou shodné. Trojúhelníky PVA a QVB jsou oba pravoúhlé a mají shodné vnitřní úhly u vrcholu V, proto též úhly PAV a QBV jsou shodné.

Osa AB je rovnoběžná se stranou KM, proto jsou dvojice úhlů PAV, LMK a QBV, LKM shodné (souhlasné úhly). Protože úhly PAV a QBV jsou shodné, také úhly LMK a LKM jsou shodné.

Poznámka. Podle zadání lze postupně určit velikosti rozličných úhlů a takto nakonec ověřit, že úhly MKL a LMK jsou shodné. Velikosti vybraných úhlů jsou vyznačeny na následujícím obrázku:



Z8–I–3

Adélka měla na papíře napsána dvě čísla. Když k nim připsala ještě jejich největší společný dělitel a nejmenší společný násobek, dostala čtyři různá čísla menší než 100. S úžasem zjistila, že když vydělí největší z těchto čtyř čísel nejmenším, dostane největší společný dělitel všech čtyř čísel.

Která čísla měla Adélka napsána na papíře? (*M. Petrová*)

Nápověda. Jaký je vztah mezi nejmenším společným násobkem a největším společným dělitelem dvou čísel?

Možné řešení. Všechna čtyři čísla byla navzájem různá, proto původní dvě čísla byla různá, jejich největší společný dělitel byl menší než každé z těchto čísel a nejmenší společný násobek větší než každé z těchto čísel. Pokud největšího společného dělitele označíme d, můžeme původní dvě čísla zapsat jako $d \cdot x$ a $d \cdot y$, kde $x < y$ jsou nesoudělná čísla větší než 1. Nejmenší společný násobek je potom roven $d \cdot x \cdot y$. Celkem tedy máme

$$d < d \cdot x < d \cdot y < d \cdot x \cdot y < 100.$$

Vlastnost, která Adélku uvedla v úžas, znamená, že podíl $d \cdot x \cdot y$ a d je roven d, neboli

$$d = x \cdot y.$$

Hledáme tedy nesoudělná čísla $x < y$ větší než 1 taková, že $(x \cdot y)^2 < 100$, neboli $x \cdot y < 10$. Taková dvojice čísel je jediná:

- pro $x = 2$ a $y = 3$ je $x \cdot y = 6 < 10$,
- pro $x = 2$ a $y = 5$ je $x \cdot y = 10$,
- pro $x = 3$ a $y = 4$ je $x \cdot y = 12 > 10$,
- atd.

Adélka měla napsána čísla $6 \cdot 2 = 12$ a $6 \cdot 3 = 18$, k nimž později připsala 6 a $6 \cdot 6 = 36$.

Z8–I–4

Roboti Robert a Hubert skládají a rozebírají kafemlýnky. Přitom každý z nich kafemlýnek složí čtyřikrát rychleji, než jej ten druhý rozebere. Když ráno přišli do dílny, několik kafemlýnků už tam bylo složeno.

V 9:00 začal Hubert skládat a Robert rozebírat, přesně ve 12:00 Hubert dokončil skládání kafemlýnku a Robert rozebírání jiného. Celkem za tuto směnu přibylo 27 kafemlýnků.

Ve 13:00 začal Robert skládat a Hubert rozebírat, přesně v 19:00 dokončil Robert skládání posledního kafemlýnku a Hubert rozebírání jiného. Celkem za tuto směnu přibylo 120 kafemlýnků.

Za jak dlouho složí kafemlýnek Hubert? Za jak dlouho jej složí Robert?

(*K. Pazourek*)

Nápověda. Kolik kafemlýnků přibyde za hodinu v každé ze směn?

Možné řešení. V dopolední tříhodinové směně přibylo 27 kafemlýnků, což odpovídá $27 : 3 = 9$ kafemlýnkům za hodinu. Protože Robert rozebírá čtyřikrát pomaleji, než Hubert skládá, Hubert sám by složil 9 kafemlýnků za $\frac{3}{4}$ hodiny, tj. 45 minut. Hubert tedy složí jeden kafemlýnek za $45 : 9 = 5$ minut.

V odpolední šestihodinové směně přibylo 120 kafemlýnků, což odpovídá $120 : 6 = 20$ kafemlýnkům za hodinu. Protože tentokrát Robert skládá a Hubert rozebírá, Robert sám by složil 20 kafemlýnků za $\frac{3}{4}$ hodiny, tj. 45 minut. Robert tedy složí jeden kafemlýnek za $45 : 20 = 2{,}25$ minut, tj. 2 minuty a 15 vteřin.

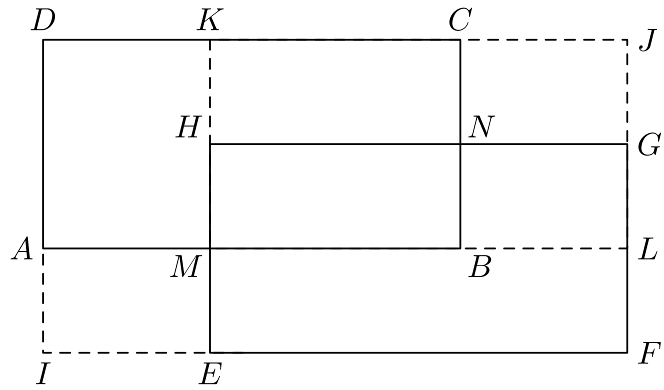
Jiné řešení. Pokud h značí počet kafemlýnků, které složí Hubert za hodinu, a r počet kafemlýnků, které za hodinu složí Robert, potom za hodinu rozloží Hubert $\frac{1}{4}r$ kafemlýnků a Robert $\frac{1}{4}h$ kafemlýnků. Informace ze zadání vedou k rovnicím:

$$3\left(h - \frac{1}{4}h\right) = 27,$$
$$6\left(r - \frac{1}{4}r\right) = 120.$$

Řešením první rovnice je $h = 12$, tedy Hubert složí 12 kafemlýnků za hodinu, tj. 60 minut. Hubert složí jeden kafemlýnek za $60 : 12 = 5$ minut. Řešením druhé rovnice je $r = \frac{80}{3}$, tedy Robert složí 80 kafemlýnků za 3 hodiny, tj. 180 minut. Robert složí jeden kafemlýnek za $180 : 80 = 2{,}25$ minut.

Z8–I–5

Shodné obdélníky $ABCD$ a $EFGH$ jsou umístěny tak, že jejich shodné strany jsou rovnoběžné. Body I, J, K, L, M a N jsou průsečíky prodloužených stran jako na obrázku.



Obsah obdélníku $BNHM$ je $12\,\mathrm{cm}^2$, obsah obdélníku $MBCK$ je $63\,\mathrm{cm}^2$ a obsah obdélníku $MLGH$ je $28\,\mathrm{cm}^2$.

Určete obsah obdélníku $IFJD$. (*E. Semerádová*)

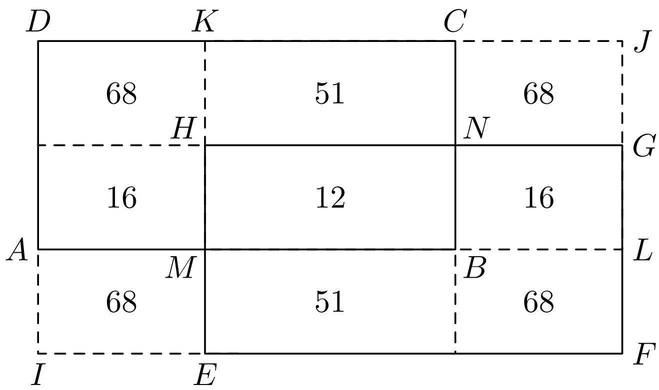
Nápověda. Jaké jsou obsahy dalších obdélníků?

Možné řešení. Obsah obdélníku $HNCK$ je $63 - 12 = 51\,(\mathrm{cm}^2)$, obsah obdélníku $BLGN$ je $28 - 12 = 16\,(\mathrm{cm}^2)$. Poměr obsahů obdélníků $NGJC$ a $HNCK$ je stejný jako poměr délek úseček NG a HN, a ten je stejný jako poměr obsahů obdélníků $BLGN$ a $MBNH$. Tedy

$$S_{NGJC} : 51 = 16 : 12 = 4 : 3,$$

a proto je obsah obdélníku $NGJC$ roven $51 \cdot 4 : 3 = 68\,(\mathrm{cm}^2)$.

Protože obdélníky $ABCD$ a $EFGH$ jsou shodné a posunuté, jsou např. úsečky IE a CJ shodné a obdobně je tomu s dalšími dvojicemi. Proto jsou např. obdélníky $IEMA$ a $NGJC$ shodné, zejména mají stejný obsah. Obdobně je tomu s dalšími dvojicemi:



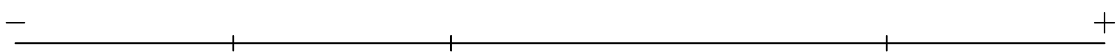
Obsah obdélníku $IFJD$ je roven $12 + 2 \cdot 51 + 2 \cdot 16 + 4 \cdot 68 = 418\,(\mathrm{cm}^2)$.

Z8–I–6

Přímka představuje číselnou osu a vyznačené body odpovídají číslům a, $-a$, $a + 1$, avšak v neurčeném pořadí.

Sestrojte body, které odpovídají číslům 0 a 1. Proberte všechny možnosti.

(*M. Petrová*)



Nápověda. Může být číslo $-a$ větší než a?

Možné řešení. Číslo $a + 1$ je o 1 větší než číslo a, leží tedy na číselné ose vpravo od čísla a a vzdálenost těchto dvou čísel je stejná jako vzdálenost hledaných čísel 0 a 1.

O vzájemné poloze čísel a a $-a$ nic nevíme; záleží na tom, zda je číslo a kladné nebo záporné. Protože rovněž nevíme nic o absolutní hodnotě $|a|$ (tj. vzdálenosti od nuly), nemůžeme porovnat ani čísla $-a$ a $a+1$. Čísla a a $-a$ však mají stejnou absolutní hodnotu, proto 0 leží na číselné ose uprostřed mezi těmito čísly.

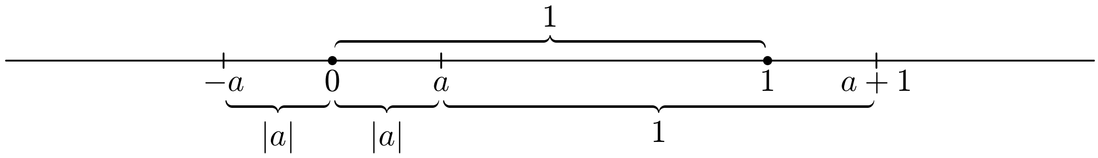
Musíme tedy uvažovat následující tři možnosti uspořádání čísel na číselné ose:

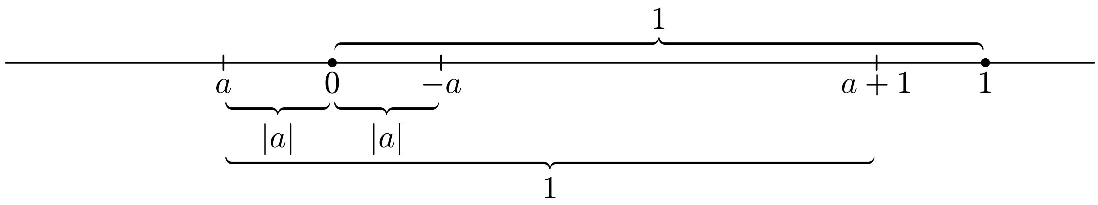
- $-a < a < a + 1$,

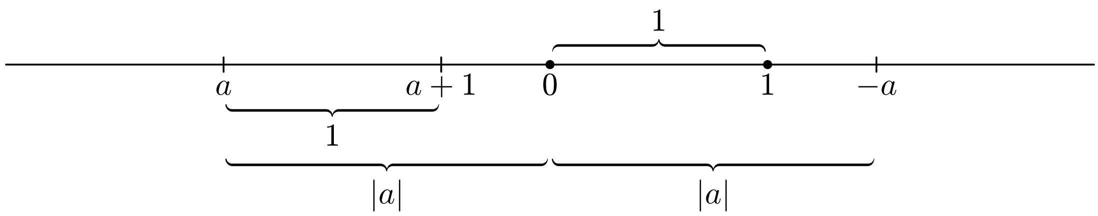
- $a < -a < a + 1$,
- $a < a + 1 < -a$.

Ve všech třech případech lze sestrojit 0 a 1 takto:

- bod představující 0 je středem úsečky s krajními body a a $-a$,
- bod představující 1 je vpravo od 0 ve stejné vzdálenosti jako $a + 1$ od a.







Poznámka. Poměr vzdáleností zadaných bodů na číselné ose určuje hodnotu čísla a pro každé ze tří možných uspořádání. Pokud by např. tento poměr byl 1 : 2 (jako na obrázku v zadání), potom by odpovídající a bylo v prvním případě $\frac{1}{2}$, ve druhém případě $-\frac{1}{6}$ a ve třetím případě $-\frac{3}{2}$.