68. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Míša má pět pastelek. Vojta jich má méně než Míša. Vendelín jich má tolik, kolik Míša a Vojta dohromady. Všichni tři dohromady mají sedmkrát více pastelek, než má Vojta.

Kolik pastelek má Vendelín? (*L. Hozová*)

Nápověda. Kolik nejméně a kolik nejvíce pastelek mohou mít dohromady?

Možné řešení. Vojta má méně pastelek než Míša, tedy může mít

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \text{nebo } 4$$

pastelky. Vendelín má o pět víc pastelek než Vojta, tedy může mít postupně

$$5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \text{nebo } 9$$

pastelek. Všichni tři dohromady mají dvojnásobek toho, co má Vendelín, tedy mohou mít postupně

$$10,\ 12,\ 14,\ 16,\ \text{nebo } 18$$

pastelek.

Mezi těmito čísly je jedině 14 sedminásobkem celého čísla, $14 = 7 \cdot 2$. Tedy Vojta má 2 pastelky a Vendelín $2 + 5 = 7$ pastelek.

Z5–I–2

Tereza dostala čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky se stranami délek 3 cm, 4 cm a 5 cm. Z těchto trojúhelníků (ne nutně ze všech čtyř) zkoušela skládat nové útvary. Postupně se jí podařilo složit čtyřúhelníky s obvodem 14 cm, 18 cm, 22 cm a 26 cm, a to pokaždé dvěma různými způsoby (tj. tak, že žádné dva čtyřúhelníky nebyly shodné).

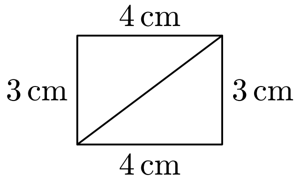
Nakreslete, jaké čtyřúhelníky mohla Tereza složit. (*L. Růžičková*)

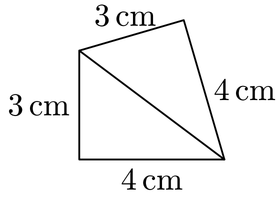
Nápověda. Vyrobte si taky takové trojúhelníky.

Možné řešení. Obvod jednoho trojúhelníku je $3+4+5 = 12$ (cm). Přiložením trojúhelníku celou stranou k již složenému útvaru může být obvod nového útvaru větší buď o $3+4-5 = 2$, nebo o $3 + 5 - 4 = 4$, nebo o $4 + 5 - 3 = 6$ (cm). Tyto poznatky poskytují jistou nápovědu k tomu, jak přikládáním trojúhelníků realizovat ten který obvod. Hlavní podmínka, kterou je nutno při experimentování hlídat, je, aby výsledný útvar byl čtyřúhelníkem.

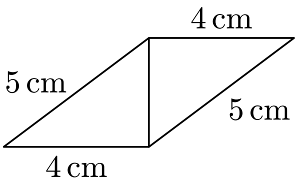
Pro jednotlivé obvody uvádíme všechna řešení, pro něž jsou výsledné čtyřúhelníky navzájem neshodné (v některých případech je možné trojúhelníky, z nichž je čtyřúhelník složen, ještě přeskládat). K vyhovujícímu řešení úlohy stačí u každého obvodu uvést dvě možnosti.

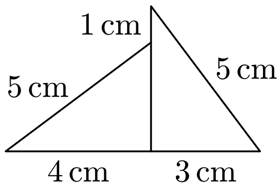
Čtyřúhelník s obvodem 14 cm lze složit pouze ze dvou trojúhelníků:

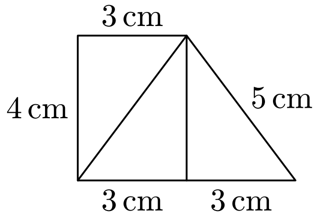




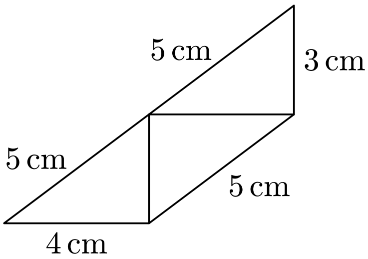
Čtyřúhelník s obvodem 18 cm lze složit buď ze dvou, nebo ze tří trojúhelníků:

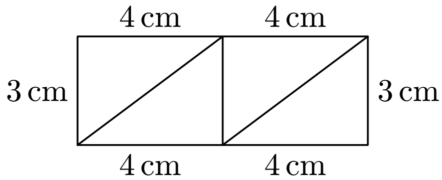


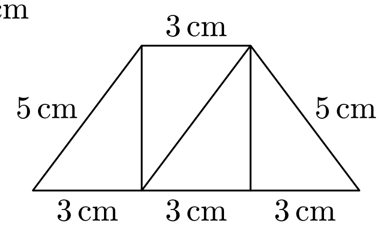


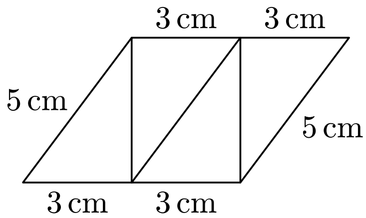


Čtyřúhelník s obvodem 22 cm lze složit pouze buď ze tří, nebo ze čtyř trojúhelníků:

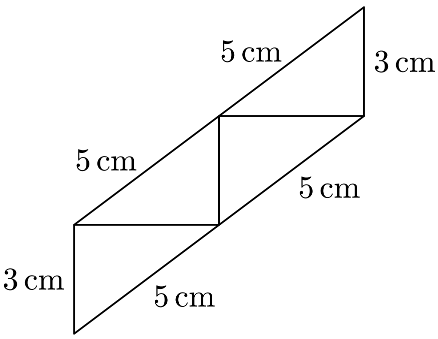


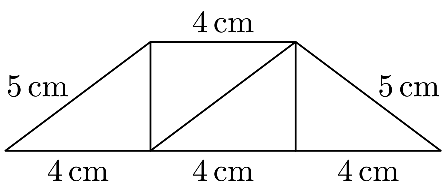


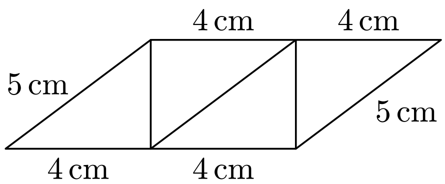




Čtyřúhelník s obvodem 26 cm lze složit pouze ze čtyř trojúhelníků:







Poznámka. To, že uvedené útvary jsou čtyřúhelníky, plyne ve většině případů z toho, že v použitých trojúhelnících jsou pravé úhly proti nejdelší, pěticentimetrové straně, příp.

z toho, že ze dvou takových trojúhelníků lze složit obdélník. Až na několik výjimek lze problém nahlížet také jako vymezování oblastí v pomocné obdélníkové síti (s úhlopříčkami). Úplné zdůvodnění nelze po řešitelích v této kategorii vyžadovat.

Z5–I–3

Šárka ráda oslavuje, takže kromě narozenin vymyslela ještě *antinarozeniny*: datum antinarozenin vznikne tak, že se vymění číslo dne a číslo měsíce v datu narození. Sama se narodila 8. 11., takže antinarozeniny má 11. 8. Její maminka antinarozeniny slavit nemůže: narodila se 23. 7., její antinarozeniny by měly být 7. 23., což ale není datum žádného dne v roce. Její bratr sice antinarozeniny slavit může, ale má je ve stejný den jako narozeniny: narodil se 3. 3.

Kolik dní v roce je takových, že člověk, který se toho dne narodil, může slavit svoje antinarozeniny, a to v jiný den než svoje narozeniny? (*V. Hucíková*)

Nápověda. Který den v měsíci musí mít člověk narozeniny, aby mohl slavit antinarozeniny?

Možné řešení. Kdo se narodil 1. 1., ten má antinarozeniny ve stejný den jako narozeniny. Kdo se narodil v období od 2. 1. do 12. 1., ten má antinarozeniny v jiný den než narozeniny. Kdo se narodil v období od 13. 1. do 31. 1., ten antinarozeniny slavit nemůže, protože měsíců v roce je jenom 12. V měsíci lednu je tedy 11 dní, které vyhovují požadavku ze zadání.

Podobně je tomu v každém dalším měsíci: prvních dvanáct dní dává smysluplné datum antinarozenin, z toho právě v jednom případě jde o totéž datum. Vyhovujících dní v každém měsíci je 11, měsíců je 12, vyhovujících dní v roce je proto $11 \cdot 12 = 132$.

Z5–I–4

V nové klubovně byly jen židle a stůl. Každá židle měla čtyři nohy, stůl byl trojnohý. Do klubovny přišli skauti. Každý si sedl na svoji židli, dvě židle zůstaly neobsazené a počet nohou v místnosti byl 101.

Určete, kolik židlí bylo v klubovně. (*L. Hozová*)

Nápověda. Kolik nohou přísluší obsazené židli?

Možné řešení. Stůl a dvě neobsazené židle mají celkem $3 + 8 = 11$ nohou. Na všechny obsazené židle tak připadá $101 - 11 = 90$ nohou. Na každé takové židli seděl jeden skaut se dvěma nohama. V klubovně tedy bylo $90 : 6 = 15$ obsazených židlí a $15 + 2 = 17$ židlí celkem.

Z5–I–5

Tomáš dostal devět kartiček, na nichž byly následující čísla a matematické symboly:

$$18,\ 19,\ 20,\ 20,\ +,\ -,\ \times,\ (,\ )$$

Kartičky skládal tak, že vedle sebe nikdy neležely dvě kartičky s čísly, tj. střídaly se kartičky s čísly a kartičky se symboly. Takto vzniklé úlohy vypočítal a výsledek si zapsal.

Určete, jaký největší výsledek mohl Tomáš získat. (*K. Pazourek*)

Nápověda. Kam mohl Tomáš umístit závorky?

Možné řešení. Tomáš měl 4 kartičky s čísly a 5 kartiček se symboly. V jím sestavených úlohách se tyto dva typy kartiček střídaly, proto každá začínala a končila symbolem:

S Č S Č S Č S Č S

Před levou závorkou a za pravou závorkou by měl být symbol s nějakou matematickou operací. Aby současně byla splněna předchozí podmínka a aby kartičky tvořily smysluplné úlohy, musel Tomáš umístit závorky na kraje takto:

(Č S Č S Č S Č)

Násobení a přičítání výsledek zvětšuje, přičemž větší vliv má násobení, odčítání výsledek zmenšuje. Největší možný výsledek mohl Tomáš získat násobením největších možných čísel, odečtením nejmenšího možného čísla a přičtením zbylého čísla, tedy např. takto:

$$(20 \times 20 - 18 + 19),$$

což je rovno 401.

Poznámka. V uvedeném řešení jsme neuvažovali zkrácený zápis násobení závorky číslem. S tímto nápadem by největší výsledek bylo možné získat takto:

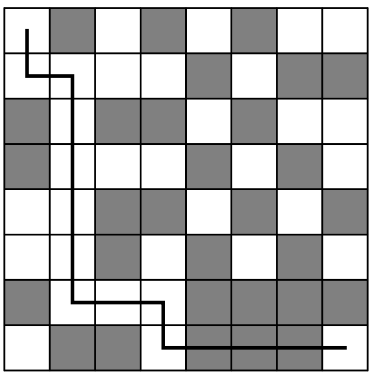
$$+ 19 (20 \times 20 - 18),$$

což je rovno 7 258. I takové řešení hodnoťte jako správné.

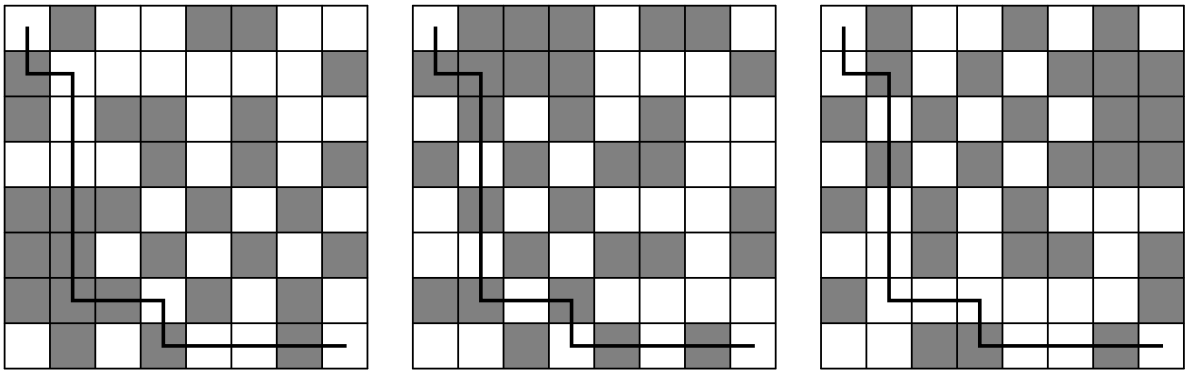
Z5–I–6

Na obrázku je herní plánek a cesta, kterou Jindra zamýšlel projít z pravého dolního rohu do levého horního. Poté zjistil, že má plánek chybně pootočený, tedy že by nezačínal v pravém dolním rohu. Tvar zamýšlené cesty už ale nemohl změnit a musel ji projít při správném natočení plánku.

Pro každé ze tří možných natočení překreslete uvedenou cestu a určete, kolika šedými poli tato cesta prochází. (*E. Semerádová*)



Možné řešení. Při postupném pootáčení plánku dostáváme:



Cesta v jednotlivých případech prochází sedmi, osmi, resp. čtyřmi šedými poli.