I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Na každé ze tří kartiček je napsána jedna číslice různá od nuly (na různých kartičkách nejsou nutně různé číslice). Víme, že jakékoli trojmístné číslo poskládané z těchto kartiček je dělitelné šesti. Navíc lze z těchto kartiček poskládat trojmístné číslo dělitelné jedenácti.

Jaké číslice mohou být na kartičkách? Určete všechny možnosti. (*V. Hucíková*)

Nápověda. Které číslice nemohou být na kartičkách?

Možné řešení. Číslo je dělitelné šesti, právě když je dělitelné dvěma a současně třemi, tj. právě když je sudé a jeho ciferný součet je dělitelný třemi. Na všech kartičkách proto musí být sudé číslice a jejich součet musí být dělitelný třemi. Trojice číslic vyhovující těmto dvěma požadavkům jsou (až na pořadí):

$$2,\ 2,\ 2,\quad 2,\ 2,\ 8,\quad 2,\ 4,\ 6,\quad 2,\ 8,\ 8,\quad 4,\ 4,\ 4,\quad 4,\ 6,\ 8,\quad 6,\ 6,\ 6,\quad 8,\ 8,\ 8.$$

Nyní je potřeba pro každou trojici vyzkoušet, zda lze při nějakém uspořádání číslic dostat trojmístné číslo dělitelné 11. To se kromě třetí trojice nestane a pro tuto trojici dvě ze šesti možných uspořádání dávají číslo dělitelné 11:

$$462 : 11 = 42, \quad 264 : 11 = 24.$$

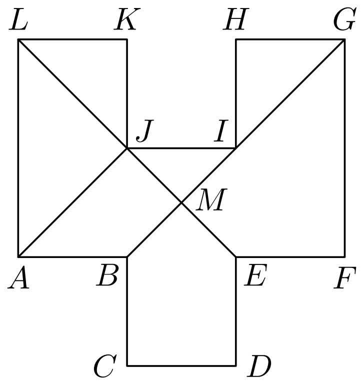
Na kartičkách mohou být jedině číslice 2, 4 a 6.

Poznámka. Při ověřování dělitelnosti 11 lze s výhodou využít následujícího kritéria: číslo je dělitelné 11, právě když rozdíl součtu číslic na sudých a na lichých místech je dělitelný 11. (Zde $4 - 6 + 2 = 0$ a $2 - 6 + 4 = 0$ jsou dělitelné 11, ale např. $2 - 4 + 6 = 4$ není.)

Z7–I–2

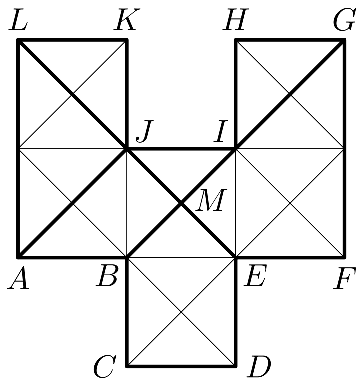
Ve dvanáctiúhelníku $ABCDEFGHIJKL$ jsou každé dvě sousední strany kolmé a všechny strany s výjimkou stran AL a GF jsou navzájem shodné. Strany AL a GF jsou oproti ostatním stranám dvojnásobně dlouhé. Úsečky BG a EL se protínají v bodě M. Čtyřúhelník $ABMJ$ má obsah $1{,}8\,\mathrm{cm}^2$.

Určete obsah čtyřúhelníku $EFGM$. (*E. Semerádová*)



Nápověda. Rozdělte obrázek na menší navzájem shodné útvary.

Možné řešení. Ze zadání víme, že dvanáctiúhelník $ABCDEFGHIJKL$ sestává ze šesti navzájem shodných čtverců. Každý z těchto čtverců může být dále rozdělen úhlopříčkami na čtyři navzájem shodné trojúhelníčky. Dvanáctiúhelník tedy sestává z 24 navzájem shodných trojúhelníčků, a to tak, že každý z výše jmenovaných útvarů je tvořen několika takovými trojúhelníčky:



Nyní je zřejmé, že obsahy čtyřúhelníku $ABMJ$ a čtyřúhelníku $EFGM$ jsou v poměru 3 : 7. Protože obsah čtyřúhelníku $ABMJ$ je $1{,}8\,\mathrm{cm}^2$, je obsah čtyřúhelníku $EFGM$ roven $4{,}2\,\mathrm{cm}^2$.

Z7–I–3

Děda připravil pro svých šest vnoučat hromádku lískových oříšků s tím, ať si je nějak rozeberou. První přišel Adam, odpočítal si polovinu, přibral si ještě jeden oříšek a odešel. Stejně se zachoval druhý Bob, třetí Cyril, čtvrtý Dan i pátý Eda. Jen Franta smutně hleděl na prázdný stůl; už na něj žádný oříšek nezbyl.

Kolik oříšků bylo původně na hromádce? (*M. Volfová*)

Nápověda. Kolik oříšků si vzal Eda?

Možné řešení. Budeme postupovat odzadu:

Když si Eda vzal polovinu oříšků, které na něj zbyly po Danovi, a jeden navíc, nezbylo nic. Tuto polovinu tedy tvořil jeden oříšek. Po Danovi zbyly dva oříšky.

Dan si také bral polovinu oříšků, které na něj zbyly po Cyrilovi, a jeden navíc. Tuto polovinu tedy tvořily ony dva oříšky plus jeden navíc. Po Cyrilovi zbylo šest oříšků.

Obdobně je to s ostatními. Polovinu oříšků, které zbyly na Cyrila po Bobovi, tvořilo předchozích šest oříšků plus jeden navíc. Po Bobovi zbylo 14 oříšků.

Polovinu oříšků, které zbyly na Boba po Adamovi, tvořilo předchozích 14 oříšků plus jeden navíc. Po Adamovi zbylo 30 oříšků.

Těchto 30 oříšků plus jeden navíc tvořilo polovinu všech oříšků, které byly připraveny k rozebrání. Původně bylo na hromádce 62 oříšků.

Poznámka. Pokud z značí počet oříšků, které zbyly po odebírání některého z chlapců, potom před tím na hromádce bylo $2(z + 1)$ oříšků. Toto je zkrácený zápis opakující se myšlenky předchozího řešení.

Naopak, pokud n značí počet oříšků na hromádce před tím, než některý chlapec začal odebírat, potom si vzal $\frac{n}{2}+1$ oříšků a po něm zbylo $n-\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n}{2}-1$ oříšků. Opakováním tohoto kroku dostáváme posloupnost zbytků

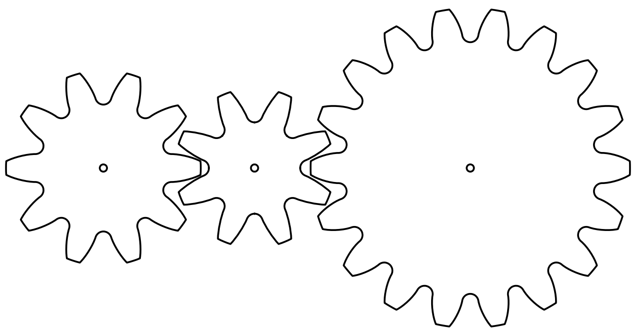
$$n, \quad \frac{n}{2}-1, \quad \frac{n}{4}-\frac{3}{2}, \quad \frac{n}{8}-\frac{7}{4}, \quad \frac{n}{16}-\frac{15}{8}, \quad \frac{n}{32}-\frac{31}{16}, \quad \dots$$

Kdyby n byl původní počet oříšků, potom zbytek po Edovi by byl $\frac{n}{32}-\frac{31}{16}$. Tento výraz je roven nule, právě když $n = 62$.

Z7–I–4

Bětka si hrála s ozubenými koly, která skládala tak, jak je naznačeno na obrázku. Když pak zatočila jedním kolem, točila se všechna ostatní. Nakonec byla spokojena se soukolím, kde první kolo mělo 32 a druhé 24 zubů. Když se třetí kolo otočilo přesně osmkrát, druhé kolo udělalo pět otáček a část šesté a první kolo udělalo čtyři otáčky a část páté.

Zjistěte, kolik zubů mělo třetí kolo. (*E. Novotná*)



Nápověda. Kolikrát zuby prvního kola zapadnou mezi zuby druhého kola, jestliže se první kolo otočí čtyřikrát?

Možné řešení. Na všech kolech je počet zubů použitých při otáčení stejný (každý zub počítáme tolikrát, kolikrát byl v kontaktu s jiným zubem na jiném kole). Podle zadání umíme o tomto počtu říct následující.

První kolo mělo 32 zubů a udělalo čtyři otáčky a část páté, tedy bylo použito víc než $32 \cdot 4 = 128$ a méně než $32 \cdot 5 = 160$ zubů. Druhé kolo mělo 24 zubů a udělalo pět otáček a část šesté, tedy bylo použito víc než $24 \cdot 5 = 120$ a méně než $24 \cdot 6 = 144$ zubů. Třetí kolo se otočilo přesně osmkrát, tedy počet použitých zubů je dělitelný osmi.

Dohromady, počet použitých zubů je číslo, které je násobkem osmi, je větší než 128 a menší než 144. Takové číslo je jediné, totiž 136. Třetí kolo mělo $136 : 8 = 17$ zubů.

Z7–I–5

V zahradnictví Rose si jedna prodejna objednala celkem 120 růží v barvě červené a žluté, druhá prodejna celkem 105 růží v barvě červené a bílé a třetí prodejna celkem 45 růží v barvě žluté a bílé. Zahradnictví zakázku splnilo, a to tak, že růží stejné barvy dodalo do každého obchodu stejně.

Kolik celkem červených, kolik bílých a kolik žlutých růží dodalo zahradnictví do těchto tří prodejen? (*M. Volfová*)

Nápověda. Představte si jednotlivé objednávky v rámci celkového počtu dodaných růží.

Možné řešení. Sečteme-li počty růží dodaných do všech tří prodejen, dostaneme 270 kusů. V tomto součtu jsou dvakrát zahrnuty počty růží od každé barvy.

V první prodejně byly růže červené a žluté v celkovém počtu 120 kusů. Dvojnásobek tohoto počtu je 240, bílých růží dodaných do zbylých dvou prodejen tedy bylo $270 - 240 = 30$.

V druhé prodejně bylo 105 růží červených a bílých. Dvojnásobek tohoto počtu je 210, žlutých růží dodaných do zbylých dvou prodejen tedy bylo $270 - 210 = 60$.

Ve třetí prodejně bylo 45 růží žlutých a bílých. Dvojnásobek tohoto počtu je 90, červených růží dodaných do zbylých dvou prodejen tedy bylo $270 - 90 = 180$.

Poznámka. V jednotlivých prodejnách byly počty růží každé barvy poloviční, tedy bílých 15, žlutých 30 a červených 90.

Pokud bychom tyto původně neznámé počty označili b, $\check{z}$ a $\check{c}$, potom informace ze zadání lze zapsat jako

$$\check{c} + \check{z} = 120, \quad \check{c} + b = 105, \quad \check{z} + b = 45.$$

Úvahy ve výše uvedeném řešení tak odpovídají následujícím úpravám:

$$2\check{c} + 2\check{z} + 2b = 270, \quad 2\check{c} + 2\check{z} = 240, \quad \text{tedy} \quad 2b = 30,$$

a podobně ve zbylých dvou případech.

Z7–I–6

Je dán rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABS se základnou AB. Na kružnici, která má střed v bodě S a prochází body A a B, leží bod C tak, že trojúhelník ABC je rovnoramenný.

Určete, kolik bodů C vyhovuje uvedeným podmínkám, a všechny takové body sestrojte. (*K. Pazourek*)

Nápověda. Co je rovnoramenný trojúhelník?

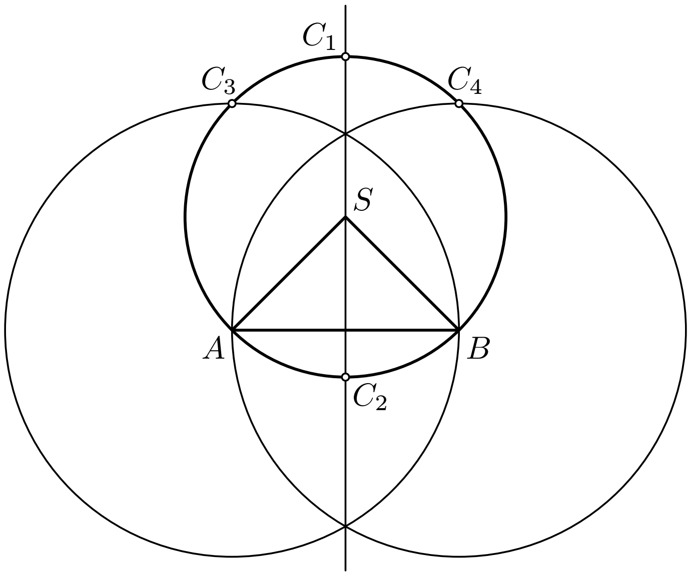
Možné řešení. Strana AB rovnoramenného trojúhelníku ABC může být buď jeho základnou, nebo ramenem. Podle toho rozdělíme řešení na dvě části.

a) Strana AB je základnou rovnoramenného trojúhelníku ABC. V tomto případě je C hlavním vrcholem trojúhelníku ABC a leží na jeho ose souměrnosti. Osa souměrnosti trojúhelníku ABC je osou úsečky AB. Tato přímka protíná zadanou kružnici ve dvou bodech, což jsou dvě možná řešení úlohy, která označíme C_1 a C_2.

b) Strana AB je ramenem rovnoramenného trojúhelníku ABC. V tomto případě může být hlavním vrcholem trojúhelníku ABC buď bod A, nebo bod B. Pokud by hlavním vrcholem byl bod A, potom by strana AC byla ramenem a bod C by byl od bodu A stejně vzdálen jako bod B. Bod C by tudíž ležel na kružnici se středem v bodě A procházející bodem B. Tato kružnice protíná zadanou kružnici v jednom dalším bodě, který označíme C_3.

Obdobně, pokud by hlavním vrcholem byl bod B, potom by zbylý vrchol trojúhelníku ležel na kružnici se středem v bodě B procházející bodem A. Odpovídající průsečík se zadanou kružnicí označíme C_4.

Na zadané kružnici leží čtyři body C_1, C_2, C_3, C_4 vyhovující podmínkám ze zadání. Konstrukce všech bodů vyplývá z předchozího popisu: body C_3 a C_4 jsou průsečíky dané kružnice se dvěma pomocnými kružnicemi; osa úsečky AB, a tedy body C_1 a C_2, je určena společnými body těchto dvou pomocných kružnic.



Poznámka. Z pravoúhelnosti trojúhelníku ABS plyne, že body A, B, C_3, C_4 tvoří vrcholy čtverce. Odtud lze vyvodit alternativní konstrukce příslušných bodů.