I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Najděte všechna kladná celá čísla x a y, pro která platí

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}.$$

(*A. Bohiniková*)

Nápověda. Mohou být obě neznámé současně větší než např. 14?

Možné řešení. Pro stejné neznámé je řešením zřejmě $x=y=8$.

Různé neznámé nemohou být obě současně menší, resp. větší než 8 (pak by totiž levá strana rovnice byla větší, resp. menší než $\frac{1}{4}$). Jedna neznámá tedy musí být menší než 8 a druhá větší než 8. Vzhledem k symetričnosti rovnice stačí dále uvažovat případ, kdy $x<y$. Za tohoto předpokladu je $x<8$ a $y>8$, takže x může nabývat pouze hodnot od 1 do 7.

Pokud z rovnice vyjádříme y obecně pomocí x, dostaneme

$$y=\frac{4x}{x-4}. \tag{1}$$

Odtud je patrné, že y je kladné, právě když $x>4$. Tedy x může nabývat pouze hodnot od 5 do 7. Pro tyto tři možnosti stačí prověřit, zda y vychází celé:

- pro $x=5$ vychází $y=20$,
- pro $x=6$ vychází $y=12$,
- pro $x=7$ vychází $y=\frac{28}{3}$.

Celkem tak vidíme, že všechny dvojice (x,y), které jsou řešením úlohy, jsou $(5,20)$, $(6,12)$, $(8,8)$, $(12,6)$ a $(20,5)$.

Jiné řešení. Pokud z rovnice vyjádříme y obecně pomocí x, dostaneme (1). Tento výraz můžeme dále upravit na „celou část plus zbytek“:

$$y=\frac{4x}{x-4}=\frac{4(x-4)+16}{x-4}=4+\frac{16}{x-4}. \tag{2}$$

Odtud je patrné, že y je kladné celé číslo, právě když $x-4$ je kladným celým dělitelem čísla 16, a těch je právě pět:

- pro $x-4=1$ vychází $x=5$ a $y=20$,
- pro $x-4=2$ vychází $x=6$ a $y=12$,
- pro $x-4=4$ vychází $x=8$ a $y=8$,
- pro $x-4=8$ vychází $x=12$ a $y=6$,
- pro $x-4=16$ vychází $x=20$ a $y=5$.

Tento výčet zahrnuje všechna řešení úlohy.

Poznámka. Při úpravě zadané rovnice do tvaru (1) lze narazit na ekvivalentní rovnici

$$xy - 4x - 4y = 0. \tag{3}$$

Levá strana souhlasí se třemi sčítanci v roznásobení výrazu $(x-4)(y-4)$, chybí pouze 16. Přičtením 16 k oběma stranám rovnice (3) dostáváme

$$(x-4)(y-4) = 16.$$

Všechna řešení tak lze najít pomocí všech možných rozkladů čísla 16 na součin dvou kladných celých čísel. Tyto nápady jsou jen bezzlomkovou interpretací úpravy (2) a následného postupu.

Z9–I–2

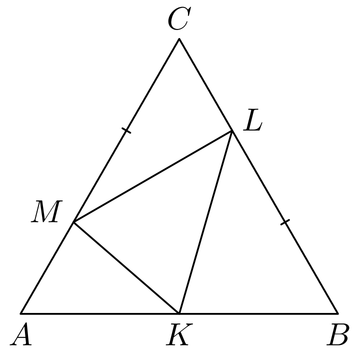
V rovnostranném trojúhelníku ABC je K středem strany AB, bod L leží ve třetině strany BC blíže bodu C a bod M leží ve třetině strany AC blíže bodu A.

Určete, jakou část obsahu trojúhelníku ABC zaujímá trojúhelník KLM.

(*L. Růžičková*)

Nápověda. Zadané body vymezují další trojúhelníky. Zamyslete se nad obsahy některých z nich.

Možné řešení. Obsah trojúhelníku KLM vyjádříme jako rozdíl obsahu trojúhelníku ABC a obsahů trojúhelníků AKM, KBL a MLC.



Poměr vzdáleností bodů M a C od bodu A je stejný jako poměr vzdáleností těchto bodů od přímky AB. Výška trojúhelníku AKM jdoucí vrcholem M je tedy třetinová vzhledem k výšce trojúhelníku ABC jdoucí vrcholem C. Současně strana AK prvního trojúhelníku protilehlá vrcholu M je poloviční vzhledem ke straně AB druhého trojúhelníku protilehlé vrcholu C. Trojúhelník AKM proto zaujímá $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ obsahu trojúhelníku ABC.

Obdobně, výška trojúhelníku KBL jdoucí vrcholem L je dvoutřetinová vzhledem k výšce trojúhelníku ABC jdoucí vrcholem C a příslušná strana KB prvního trojúhelníku je poloviční vzhledem ke straně AB druhého trojúhelníku. Trojúhelník KBL proto zaujímá $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ obsahu trojúhelníku ABC.

Do třetice, výška trojúhelníku CML jdoucí vrcholem L je třetinová vzhledem k výšce trojúhelníku ABC jdoucí vrcholem B a příslušná strana CM prvního trojúhelníku je dvoutřetinová vzhledem ke straně AC druhého trojúhelníku. Trojúhelník KBL proto zaujímá $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ obsahu trojúhelníku ABC.

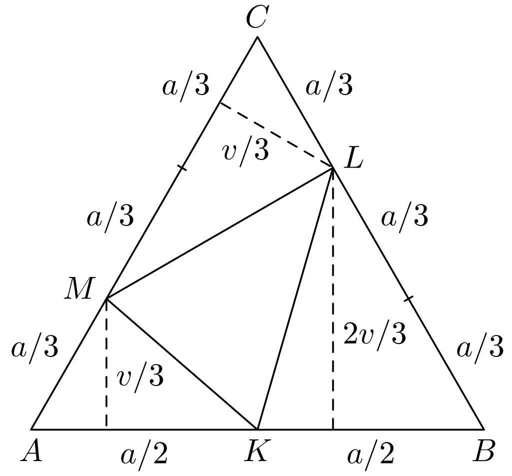
Dohromady, trojúhelník KLM zaujímá

$$1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}$$

obsahu trojúhelníku ABC.

Poznámka. Všimněte si, že uvedené řešení je platné pro obecný trojúhelník ABC.

S předpokladem rovnostrannosti jsou strany a výšky jednotlivých trojúhelníků naznačeny na následujícím obrázku (a značí stranu a v výšku trojúhelníku ABC).



S tímto značením je $S_{ABC} = \frac{1}{2}av$ a $S_{KLM} = \frac{5}{36}av$, tedy $S_{KLM} = \frac{5}{18}S_{ABC}$.

Z9–I–3

V našem městě jsou tři kina, kterým se říká podle světových stran. O jejich otevíracích dobách je známo, že:

1. každý den má otevřeno alespoň jedno kino,
2. pokud má otevřeno jižní kino, potom nemá otevřeno severní kino,
3. nikdy nemá otevřeno současně severní a východní kino,
4. pokud má otevřeno východní kino, potom má také otevřeno jižní nebo severní kino.

Vydali jsme se do jižního kina a zjistili jsme, že je zavřené. Které ze zbývajících kin má jistě otevřeno? *(M. Dillingerová)*

Nápověda. Uvažte všechny možnosti otevřenosti, resp. zavřenosti kin bez omezujících podmínek.

Možné řešení. Zajímáme se o situaci, kdy má jižní kino zavřeno. Bez dalších informací o otevíracích dobách by mohly nastat následující čtyři případy, které postupně porovnáme s podmínkami ze zadání:

a) Pokud by severní i východní kino mělo otevřeno, potom bychom byli v rozporu s třetí podmínkou. Tato situace nenastane.
b) Pokud by severní kino mělo otevřeno a východní zavřeno, potom nejsme v rozporu s žádnou z podmínek. Tato situace je možná.

c) Pokud by severní kino mělo zavřeno a východní otevřeno, potom bychom byli v rozporu se čtvrtou podmínkou. Tato situace nenastane.
d) Pokud by severní i východní kino mělo zavřeno, potom bychom byli v rozporu s první podmínkou. Tato situace nenastane.

Jediná situace vyhovující všem podmínkám ze zadání je b): když má jižní kino zavřeno, potom má severní kino jistě otevřeno.

Jiná nápověda. Jaké možnosti vyhovují třetí podmínce?

Jiné řešení. Vzhledem k třetí podmínce můžeme čtvrtou podmínku nahradit následující:

4′. pokud má otevřeno východní kino, potom má také otevřeno jižní kino.

Podle třetí podmínky můžeme rozlišit tři případy:

a) Severní kino má otevřeno a východní zavřeno. Potom podle druhé podmínky má jižní kino zavřeno.
b) Severní kino má zavřeno a východní otevřeno. Potom podle čtvrté podmínky (resp. jeho právě uvedené náhražky) má jižní kino otevřeno.
c) Severní i východní kino má zavřeno. Potom podle první podmínky má jižní kino otevřeno.

V žádném z těchto případů nejsme v rozporu s podmínkami, které jsme při vyvozování nepoužili. Všechny možné situace otevřenosti (1), resp. zavřenosti (0) kin uvádíme pro přehlednost v tabulce:

S	1	0	0
V	0	1	0
J	0	1	1

Pokud má jižní kino zavřeno, potom má severní kino jistě otevřeno (a východní jistě zavřeno).

Poznámka. Diskuse v řešení úlohy může být vedena různými způsoby. Pro tyto účely znázorníme možnosti, které připouští podmínky ze zadání samostatně — prázdná políčka mohou obsahovat jak 1, tak 0:

První podmínka připouští možnosti

S	1		
V		1	
J			1

Druhá podmínka připouští možnosti

S	0	
V		
J	1	0

Třetí podmínka připouští možnosti

S	1	0	0
V	0	1	0
J			

Čtvrtá podmínka připouští možnosti

S		1	1	
V	1	1	1	0
J	1		1	

Výběr možností, které vyhovují všem čtyřem podmínkám současně (tedy „průnik“ těchto čtyř tabulek), vede k tabulce na konci předchozího řešení.

Z9–I–4

Hoteliér chtěl vybavit jídelnu novými židlemi. V katalogu si vybral typ židle. Až při zadávání objednávky se od výrobce dozvěděl, že v rámci slevové akce nabízejí každou čtvrtou židli za poloviční cenu a že tedy oproti plánu může ušetřit za sedm a půl židle. Hoteliér si spočítal, že za původně plánovanou částku může pořídit o devět židlí více, než zamýšlel.

Kolik židlí chtěl hoteliér původně koupit? (*L. Šimůnek*)

Nápověda. Nejprve řešte úlohu bez informace, že za původně plánovanou částku lze pořídit o devět židlí více.

Možné řešení. V akci byla každá čtvrtá židle za poloviční cenu. Mohl-li tak hoteliér ušetřit za 7,5 židle, objednával 15 čtveřic židlí a nejvýše tři další židle, tj. objednával nejméně 60 a nejvýše 63 židlí.

Oproti původnímu plánu si v akci mohl dopřát o 9 židlí více, tj. nejméně 69 a nejvýše 72 židlí. V prvním případě je $69 = 17 \cdot 4 + 1$, tedy úspora by představovala jenom $17 \cdot \frac{1}{2} = 8{,}5$ židlí, což neodpovídá předpokladu. Stejný závěr platí také pro další dvě možnosti $70 = 17 \cdot 4 + 2$ a $71 = 17 \cdot 4 + 3$. Jedině pro $72 = 18 \cdot 4$ odpovídá úspora právě 9 židlím.

Ze čtyř zvažovaných možností je pouze poslední řešením úlohy. Hoteliér chtěl původně koupit 63 židlí.

Jiné řešení. Stejně jako u předchozího řešení určíme, že úspora za 7,5 židle odpovídá objednávce nejméně 60 a nejvýše 63 židlí ($7{,}5 = \frac{1}{2} \cdot 15$ a $15 \cdot 4 = 60$).

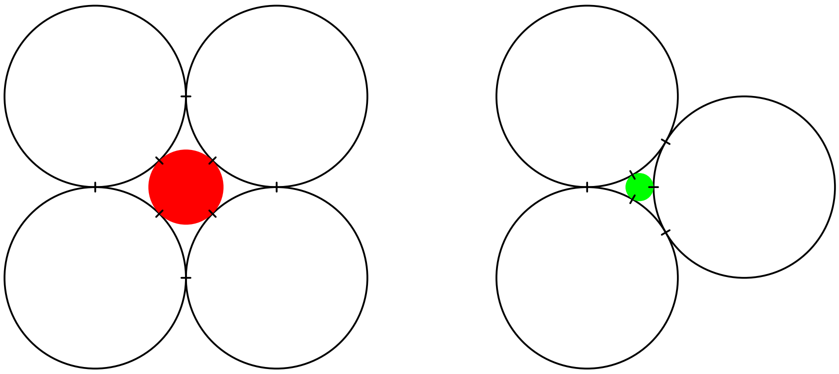
Podobně určíme, že úspora za 9 židlí odpovídá objednávce nejméně 72 a nejvýše 75 židlí ($9 = \frac{1}{2} \cdot 18$ a $18 \cdot 4 = 72$). Tento počet má být zároveň o 9 větší než počet židlí v předchozí objednávce, tedy úspora za 9 židlí má odpovídat objednávce nejméně 69 a nejvýše 72 židlí. Tyto dvě podmínky jsou splněny pouze v jediném případě, který odpovídá počtu 72 v druhé, resp. 63 v první objednávce.

Hoteliér chtěl původně koupit 63 židlí.

Z9–I–5

Adam a Eva vytvářeli dekorace z navzájem shodných bílých kruhů. Adam použil čtyři kruhy, které sestavil tak, že se každý dotýkal dvou jiných kruhů. Mezi ně pak vložil jiný kruh, který se dotýkal všech čtyř bílých kruhů, a ten vybarvil červeně. Eva použila tři kruhy, které sestavila tak, že se dotýkaly navzájem. Mezi ně pak vložila jiný kruh, který se dotýkal všech tří bílých kruhů, a ten vybarvila zeleně.

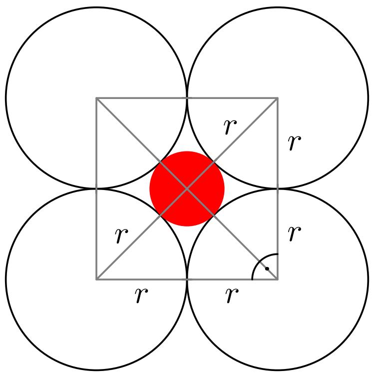
Eva si všimla, že její zelený kruh a Adamův červený kruh jsou různě velké, a začali společně zjišťovat, jak se liší. Vyjádřete poloměry červeného a zeleného kruhu obecně pomocí poloměru bílých kruhů. (*M. Krejčová a M. Dillingerová*)



Nápověda. V jakém vztahu jsou středy dvou dotýkajících se kružnic a příslušný dotykový bod?

Možné řešení. V následujícím budeme opakovaně používat poznatek, že společný bod dvou dotýkajících se kružnic leží na spojnici jejich středů. Poloměr bílých kruhů budeme značit r.

Středy Adamových bílých kruhů tvoří vrcholy čtverce a střed červeného kruhu leží ve středu tohoto čtverce, tedy v průsečíku jeho úhlopříček. Průměr červeného kruhu je roven rozdílu úhlopříčky zmiňovaného čtverce a dvou poloměrů r.



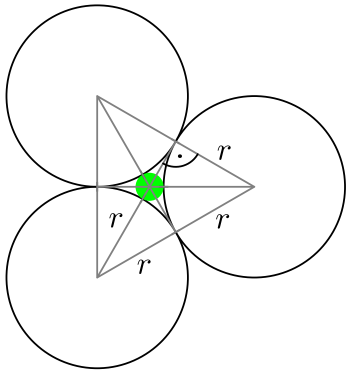
Pomocný čtverec má stranu $2r$, jeho úhlopříčka má podle Pythagorovy věty velikost

$$\sqrt{4r^2 + 4r^2} = 2\sqrt{2}r.$$

Poloměr červeného kruhu je tedy roven

$$\frac{1}{2}(2\sqrt{2}r - 2r) = (\sqrt{2} - 1)r.$$

Středy Eviných bílých kruhů tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku a střed zeleného kruhu leží ve středu tohoto trojúhelníku, tedy v průsečíku jeho výšek, resp. těžnic. Poloměr zeleného kruhu je roven rozdílu vzdálenosti středu, tj. těžiště zmiňovaného trojúhelníku, od jeho vrcholu a poloměru r.



Pomocný rovnostranný trojúhelník má stranu $2r$ a každá výška jej dělí na pravoúhlé trojúhelníky s přeponou $2r$ a odvěsnou r. Druhá odvěsna, tedy ona výška, má podle Pythagorovy věty velikost

$$\sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3}r.$$

Vzdálenost těžiště rovnostranného trojúhelníku od vrcholu je rovna dvěma třetinám délky těžnice, tj. právě vyjádřené výšky. Poloměr zeleného kruhu je tedy roven

$$\frac{2}{3}\sqrt{3}r - r = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3}r.$$

Z9–I–6

Přirozené číslo N nazveme *bombastické*, pokud neobsahuje ve svém zápise žádnou nulu a pokud žádné menší přirozené číslo nemá stejný součin číslic jako číslo N.

Karel se nejprve zajímal o bombastická prvočísla a tvrdil, že jich není mnoho. Vypište všechna dvojmístná bombastická prvočísla.

Potom Karel zvolil jedno bombastické číslo a prozradil nám, že obsahuje číslici 3 a že jen jedna z jeho dalších číslic je sudá. O kterou sudou číslici mohlo jít? (*M. Rolínek*)

Nápověda (ke druhé části). Najdete nebombastická čísla obsahující číslici 3?

Možné řešení. Všechna dvojmístná prvočísla jsou vypsána v prvním řádku následující tabulky. Ve druhém řádku jsou uvedeny ciferné součiny jednotlivých čísel. Ve třetím řádku jsou nejmenší přirozená čísla s odpovídajícími ciferným součiny (tato čísla lze určit porovnáním rozkladů se všemi děliteli menšími než 10). Dvojmístných bombastických prvočísel je sedm a v tabulce jsou vyznačena tlustě.

11	13	17	19	23	**29**	31	**37**	41	43	**47**	53	**59**	61	**67**	71	73	**79**	83	**89**	97
1	3	7	9	6	18	3	21	4	12	28	15	45	6	42	7	21	63	24	72	63
1	3	7	9	6	29	3	37	4	26	47	35	59	6	67	7	37	79	38	89	79

V předchozím výčtu si můžeme všimnout několika věcí souvisejících s druhou částí úlohy. Číslo 23 není bombastické, protože 6 je menší číslo se stejným ciferným součinem. Obecněji, žádné číslo obsahující číslice 2 a 3 nemůže být bombastické, neboť vynecháním těchto dvou číslic a doplněním 6 na libovolné místo dostaneme menší číslo se stejným ciferným součinem (např. pro $\underline{2}7\underline{3}7$ je jedno z takových čísel $\underline{6}77$).

Obdobně, číslo 34 není bombastické, protože 26 je menší číslo se stejným ciferným součinem. Tedy ani žádné číslo obsahující číslice 3 a 4 nemůže být bombastické (viz např. čísla $\underline{3}8\underline{4}$ a $\underline{2}8\underline{6}$). Do třetice, číslo 36 není bombastické, protože 29 je menší číslo se stejným ciferným součinem. Tedy ani žádné číslo obsahující číslice 3 a 6 nemůže být bombastické (viz např. čísla $2\underline{3}4\underline{6}$ a $2\underline{29}4$).

Zato vidíme, že číslo 38 bombastické je. Jediná sudá číslice, která může být s 3 v Karlově bombastickém čísle je tedy 8.

Poznámka. V tabulce v první části úlohy nebylo nutné uvažovat čísla obsahující číslici 1 nebo čísla, která mají na místě desítek větší číslici než na místě jednotek — taková čísla nikdy nejsou bombastická. S tímto postřehem stačilo testovat pouze osm z uvedených čísel.