68. ročník Matematické olympiády

II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

V dvoupOschoďovém domě, který je obýván kromě obou poschodí také v přízemí, bydlí 35 lidí nad někým a 45 lidí bydlí pod někým. Přitom v 1. poschodí bydlí jedna třetina všech osob žijících v domě.

Kolik osob bydlí v domě celkem?

Z8–II–2

Pro kolik kladných čísel menších než 1000 platí, že mezi čísly 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 je právě jedno, které není jeho dělitelem?

Z8–II–3

V lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD platí, že $|AD| = |CD|$, $|AB| = 2|CD|$, $|BC| = 24$ cm a $|AC| = 10$ cm.

Vypočtěte obsah lichoběžníku $ABCD$.

Okresní kolo kategorie Z8 se koná **9. dubna 2019** tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 2 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 9 a více bodů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní matematické tabulky. Kalkulátory povoleny nejsou. Mobilní telefony musí být vypnuty.

II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

V dvouposchoďovém domě, který je obýván kromě obou poschodí také v přízemí, bydlí 35 lidí nad někým a 45 lidí bydlí pod někým. Přitom v 1. poschodí bydlí jedna třetina všech osob žijících v domě.

Kolik osob bydlí v domě celkem? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Lidé, kteří bydlí nad někým, jsou obyvateli 2. a 1. poschodí. Lidé, kteří bydlí pod někým, jsou obyvateli 1. poschodí a přízemí. V součtu $35 + 45 = 80$ jsou tak obyvatelé 1. poschodí započítáni dvakrát.

Pokud počet obyvatel 1. poschodí označíme p, potom počet všech obyvatel v domě můžeme vyjádřit jednak $80 - p$, jednak $3p$. Odtud dostáváme rovnici, kterou snadno vyřešíme:

$$\begin{aligned} 3p &= 80 - p, \\ 4p &= 80, \\ p &= 20. \end{aligned}$$

V domě bydlí celkem 60 lidí.

Hodnocení. 2 body za postřeh, že obyvatelé 1. poschodí jsou v součtu $35 + 45$ započteni dvakrát; 2 body za sestavení a vyřešení rovnice; 2 body za počet osob v domě.

Poznámka. Pokud d, p, resp. z značí počty obyvatel ve 2. poschodí, v 1. poschodí, resp. v přízemí, potom ze zadání máme

$$d + p = 35, \quad p + z = 45, \quad d + p + z = 3p.$$

Odtud lze rozličnými způsoby vyjádřit všechny neznámé: $d = 15$, $p = 20$ a $z = 25$. Taková řešení hodnoťte po 2 bodech za sestavení rovnic, za jejich vyřešení a za závěr.

Z8–II–2

Pro kolik kladných čísel menších než 1000 platí, že mezi čísly 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 je právě jedno, které není jeho dělitelem? (*E. Semerádová*)

Možné řešení. Pokud číslo není dělitelné 2, potom není dělitelné také 4, 6 a 8. Pokud číslo není dělitelné 3, potom není dělitelné také 6 a 9. Pokud číslo není dělitelné 4, potom není dělitelné také 8. Pokud číslo není dělitelné 6, potom není dělitelné 2 nebo 3. Žádné z čísel 2, 3, 4 a 6 tedy nemůže být oním jediným číslem z uvedeného seznamu, které není dělitelem hledaného čísla.

Číslo dělitelné všemi čísly z uvedeného seznamu kromě 5 musí být násobkem $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$, což je nejmenší společný násobek zbylých čísel. Kladné číslo menší než 1000 s touto vlastností je jediné, a to 504.

Číslo dělitelné všemi čísly z uvedeného seznamu kromě 7 musí být násobkem $5 \cdot 8 \cdot 9 = 360$. Kladná čísla menší než 1000 s touto vlastností jsou dvě, a to 360 a 720.

Číslo dělitelné všemi čísly z uvedeného seznamu kromě 8 musí být násobkem $4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = 1260$. Kladné číslo menší než 1000 s touto vlastností není žádné.

Číslo dělitelné všemi čísly z uvedeného seznamu kromě 9 musí být násobkem $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 840$. Kladné číslo menší než 1000 s touto vlastností je jediné, a to 840.

Čísla s uvedenými vlastnostmi jsou právě čtyři.

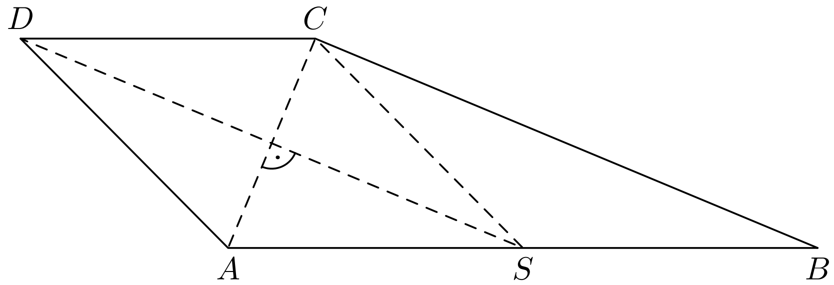
Hodnocení. 2 body za vyhovující čtyři možnosti; 4 body za vyloučení ostatních možností a kvalitu komentáře.

Z8–II–3

V lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD platí, že $|AD| = |CD|$, $|AB| = 2|CD|$, $|BC| = 24$ cm a $|AC| = 10$ cm.

Vypočtěte obsah lichoběžníku $ABCD$. (*L. Růžičková*)

Možné řešení. Označme S střed základny AB. Ze zadání plyne, že úsečky AS, SB a CD jsou shodné, tedy čtyřúhelníky $ASCD$ a $SBCD$ jsou rovnoběžníky.



Úhlopříčka SD dělí rovnoběžník $ASCD$ na dva shodné trojúhelníky. Také úhlopříčka SC dělí rovnoběžník $SBCD$ na dva shodné trojúhelníky. Obsah lichoběžníku $ABCD$ je tedy roven trojnásobku obsahu trojúhelníku ASD.

Ze zadání navíc víme, že úsečky AD a CD jsou shodné, tedy rovnoběžník $ASCD$ je kosočtvercem a jeho úhlopříčky SD a AC se protínají kolmo. Přitom $|SD| = |BC| = 24$ cm a $|AC| = 10$ cm, obsah trojúhelníku ASD je proto roven $\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 = 60$ (cm^2).

Obsah lichoběžníku $ABCD$ je roven $3 \cdot 60 = 180$ (cm^2).

Hodnocení. 2 body za vztah mezi obsahem lichoběžníku $ABCD$ a obsahem trojúhelníku ASD; 2 body za kolmost úseček SD a AC; 2 body za dopočítání obsahu a kvalitu komentáře.