68. ročník Matematické olympiády

III. kolo kategorie Z9

Z9–III–1

Adéla napsala na tabuli dvě kladná celá čísla a dala Lukášovi a Petrovi za úkol určit kladný rozdíl druhých mocnin těchto dvou čísel. Lukáš místo toho určil druhou mocninu rozdílu daných dvou čísel. Vyšlo mu tak číslo o 4 038 menší než Petrovi, který výpočet provedl správně.

Která dvě čísla mohla Adéla napsat na tabuli? Určete všechny možnosti.

(*L. Růžičková*)

Z9–III–2

Na ostrově žijí dva druhy domorodců: Poctivci, kteří vždy mluví pravdu, a Lháři, kteří vždy lžou. Když cizinec potkal tři domorodce, Alana, Bruna a Ctibora, zeptal se jich, do které skupiny patří.

Alan sdělil: „Bruno je Lhář."

Bruno řekl: „Alan a Ctibor jsou buď oba Lháři, anebo oba Poctivci."

Ctibor se nevyjádřil.

Mohl cizinec u některého z těchto domorodců s jistotou určit, jestli je Poctivec, či Lhář? (*M. Volfová*)

Z9–III–3

Když číslo X vydělím číslem Y, dostanu číslo Z a zbytek 27. Když číslo X vydělím číslem Z, dostanu číslo $1{,}1 \cdot Y$ a zbytek 3.

Která čísla X, Y, Z vyhovují uvedeným podmínkám? Určete všechny možnosti.

(*L. Hozová*)

Z9–III–4

Je dána kružnice se středem S a poloměrem 39 mm. Do kružnice máme vepsat trojúhelník ABC tak, aby velikost strany AC byla 72 mm a bod B ležel v polorovině určené přímkou AC a bodem S.

Ze zadaných údajů vypočtěte, jakou velikost má mít výška trojúhelníku ABC z vrcholu B, aby úloha měla dvě řešení. Popište všechny možnosti. (*M. Krejčová*)

Krajské kolo kategorie Z9 se koná **19. března 2019** tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 12 a více bodů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní matematické tabulky. Kalkulátory povoleny nejsou. Mobilní telefony musí být vypnuty.

III. kolo kategorie Z9

Z9–III–1

Adéla napsala na tabuli dvě kladná celá čísla a dala Lukášovi a Petrovi za úkol určit kladný rozdíl druhých mocnin těchto dvou čísel. Lukáš místo toho určil druhou mocninu rozdílu daných dvou čísel. Vyšlo mu tak číslo o 4 038 menší než Petrovi, který výpočet provedl správně.

Která dvě čísla mohla Adéla napsat na tabuli? Určete všechny možnosti.

(*L. Růžičková*)

Možné řešení. Čísla napsaná na tabuli označíme a a b, přičemž budeme předpokládat, že $a \geqq b$. Ze zadání postupně plyne

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= a^2 - b^2 - 4\,038,\\ a^2 - 2ab + b^2 &= a^2 - b^2 - 4\,038,\\ 2ab - 2b^2 &= 4\,038,\\ b(a-b) &= 2\,019,\end{aligned}$$

kde čísla b a $a-b$ jsou podle předpokladů kladná.

Rozklad čísla 2 019 na prvočinitele je $3 \cdot 673$. Číslo 2 019 lze proto vyjádřit jako součin dvou kladných celých čísel následujícími způsoby:

$$2\,019 = 1 \cdot 2\,019 = 2\,019 \cdot 1 = 3 \cdot 673 = 673 \cdot 3.$$

Pořadí součinitelů zdůrazňujeme kvůli všem možným přiřazením b a $a-b$. Odpovídající dvojice čísel (a, b) jsou (2 020,1), $(2\,020, 2\,019)$, $(676, 3)$ a (676,673).

Hodnocení. 1 bod za sestavení výchozí rovnice; 2 body za úpravu do tvaru součinu; 1 bod za rozklad na prvočinitele; 2 body za určení vyhovujících dvojic.

Při jiném postupu řešení hodnoťte 2 body za určení vyhovujících dvojic a 4 body za kvalitu komentáře, zejména zdůvodnění, že víc řešení neexistuje.

Z9–III–2

Na ostrově žijí dva druhy domorodců: Poctivci, kteří vždy mluví pravdu, a Lháři, kteří vždy lžou. Když cizinec potkal tři domorodce, Alana, Bruna a Ctibora, zeptal se jich, do které skupiny patří.

Alan sdělil: „Bruno je Lhář.“

Bruno řekl: „Alan a Ctibor jsou buď oba Lháři, anebo oba Poctivci.“

Ctibor se nevyjádřil.

Mohl cizinec u některého z těchto domorodců s jistotou určit, jestli je Poctivec, či Lhář?

(*M. Volfová*)

Možné řešení. Nejprve předpokládejme, že Alan je Poctivec. V takovém případě by jeho výrok byl pravdivý a Bruno by byl Lhář. Brunův výrok by tedy nebyl pravdivý a to by znamenalo, že Alan a Ctibor by patřili do různých skupin. Protože Alan je Poctivec, Ctibor by byl Lhář.

Nyní předpokládejme, že Alan je Lhář. V takovém případě by jeho výrok nebyl pravdivý a Bruno by byl Poctivec. Brunův výrok by tedy byl pravdivý a to by znamenalo, že Alan a Ctibor by patřili do stejné skupiny. Protože Alan je Lhář, Ctibor by byl také Lhář.

S jistotou lze určit, že Ctibor je Lhář.

Jiné řešení. Uvažme všechny možné případy, kdy u každého ze tří domorodců (A, B, C) uvažujeme každý ze dvou případů (P, L). Celkem dostáváme osm možností, které postupně porovnáme s výroky Alana a Bruna. Případný spor s některým z těchto výroků je vyznačen v posledním řádku tabulky:

A	P	P	P	P	L	L	L	L
B	P	P	L	L	P	P	L	L
C	P	L	P	L	P	L	P	L
spor s	A	A B	B		B		A	A B

S jistotou lze určit, že Ctibor je Lhář.

Hodnocení. 2 body za správný závěr; 4 body za kvalitu komentáře.

Z9–III–3

Když číslo X vydělím číslem Y, dostanu číslo Z a zbytek 27. Když číslo X vydělím číslem Z, dostanu číslo $1{,}1 \cdot Y$ a zbytek 3.

Která čísla X, Y, Z vyhovují uvedeným podmínkám? Určete všechny možnosti.

(*L. Hozová*)

Možné řešení. Ze zadání máme dvě rovnosti:

$$X = Y \cdot Z + 27 = 1{,}1 \cdot Y \cdot Z + 3.$$

Úpravami druhé rovnosti dostáváme $0{,}1 \cdot Y \cdot Z = 24$, tedy $Y \cdot Z = 240$. Dosazením zpět zjišťujeme, že $X = 267$.

Dělení se zbytkem se týká celých čísel. Všechna čísla X, Y, Z a $1{,}1 \cdot Y$ proto musí být celá. Odtud zejména plyne, že číslo Y musí být násobkem 10. Zbytek po dělení je menší než dělitel. Proto musí být $Z \geqq 4$ a $Y \geqq 28$, což spolu s předchozím závěrem dává $Y \geqq 30$.

Z rovnosti $Y \cdot Z = 240$ a požadavku $Z \geqq 4$ dostáváme $Y \leqq 240 : 4 = 60$. Obdobně z požadavku $Y \geqq 30$ dostáváme $Z \leqq 240 : 30 = 8$. Takto jsme odhalili dvě vyhovující dvojice čísel Y a Z. Všechna řešení dostaneme systematickým rozborem možností v rámci uvedených omezení:

Y	30	40	50	60
Z	8	6		4

Vyhovující trojice čísel (X, Y, Z) jsou (267,30,8), (267,40,6) a (267,60,4).

Hodnocení. Po 1 bodu za vyjádření $Y \cdot Z = 240$ a $X = 267$; po 1 bodu za každé ze tří řešení; 1 bod za kvalitu komentáře.

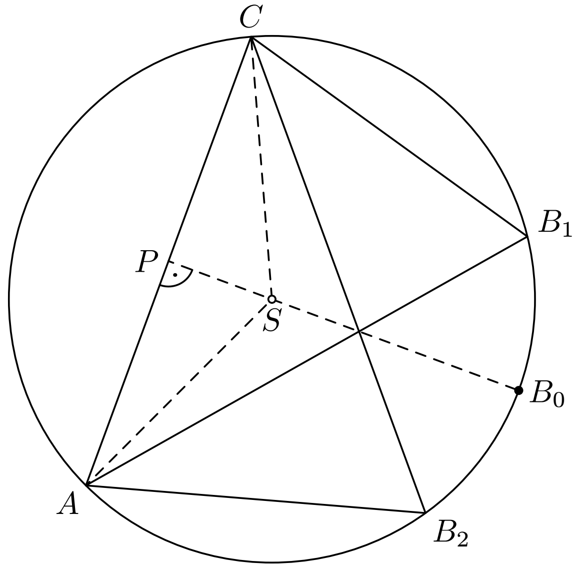
Poznámka. V uvedeném řešení lze s výhodou využít prvočíselný rozklad $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$.

Z9–III–4

Je dána kružnice se středem S a poloměrem 39 mm. Do kružnice máme vepsat trojúhelník ABC tak, aby velikost strany AC byla 72 mm a bod B ležel v polorovině určené přímkou AC a bodem S.

Ze zadaných údajů vypočtěte, jakou velikost má mít výška trojúhelníku ABC z vrcholu B, aby úloha měla dvě řešení. Popište všechny možnosti. (*M. Krejčová*)

Možné řešení. Velikost strany AC je vskutku menší než průměr kružnice, tedy tato strana neobsahuje střed S. Výška trojúhelníku ABC z vrcholu B může být libovolně malá, ale nemůže být libovolně velká: tato výška je největší, právě když obsahuje střed S. V takovém případě má úloha jediné řešení (odpovídající trojúhelník je rovnoramenný) a velikost výšky je rovna velikosti úsečky PB_0 jako na obrázku:



Velikost PB_0 je rovna součtu velikostí úseček PS a SB_0. Velikost úsečky SB_0 je rovna poloměru kružnice, tj. 39 mm. Velikost úsečky PS určíme pomocí Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku APS:

$$|PS| = \sqrt{|AS|^2 - |AP|^2} = \sqrt{39^2 - 36^2} = \sqrt{225} = 15\,(\text{mm}).$$

Tedy mezní velikost výšky je $39 + 15 = 54$ (mm). Úloha má dvě řešení, pokud je výška z vrcholu B menší než 54 mm (a větší než 0 mm).

Hodnocení. 3 body za vyjádření mezní hodnoty; 3 body za rozbor možností a kvalitu komentáře.

Odpovědi založené na odhadu nebo měření z narýsovaného obrázku hodnoťte 0 body.