I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Naše slovenská babička nakupovala v obchodě, ve kterém měli jen jablka, banány a hrušky. Jablka byla po 50 centech za kus, hrušky po 60 centech a banány byly levnější než hrušky. Babička koupila pět kusů ovoce, mezi kterými byl právě jeden banán, a zaplatila 2 eura a 75 centů.

Kolik centů mohl stát jeden banán? Určete všechny možnosti. (*K. Jasenčáková*)

Nápověda. Začněte počítat s ovocem, jehož cenu znáte.

Možné řešení. Kromě banánu babička koupila jablka a hrušky, jejichž ceny za kus známe. Jablek a hrušek byly celkem čtyři kusy. Probereme jednotlivé možnosti a určíme útratu za jablka a hrušky. Odečteme od celkové útraty a odtud zjistíme cenu banánu, kterou porovnáme s cenou hrušky:

- Čtyři jablka a žádná hruška stojí $4 \cdot 50 = 200$ centů; jeden banán by stál $275 - 200 = 75$ centů, což je víc než cena hrušky.
- Tři jablka a jedna hruška stojí $3 \cdot 50 + 1 \cdot 60 = 210$ centů; jeden banán by stál $275 - 210 = 65$ centů, což je víc než cena hrušky.
- Dvě jablka a dvě hrušky stojí $2 \cdot 50 + 2 \cdot 60 = 220$ centů; jeden banán by stál $275 - 220 = 55$ centů, což je méně než cena hrušky.
- Jedno jablko a tři hrušky stojí $1 \cdot 50 + 3 \cdot 60 = 230$ centů; jeden banán by stál $275 - 230 = 45$ centů, což je méně než cena hrušky.
- Žádné jablko a čtyři hrušky stojí $4 \cdot 60 = 240$ centů; jeden banán by stál $275 - 240 = 35$ centů, což je méně než cena hrušky.

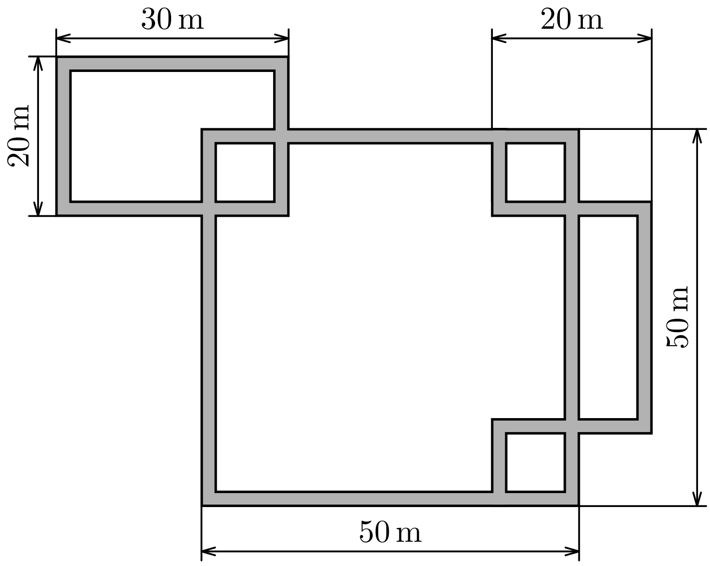
Banán mohl stát 35, 45, nebo 55 centů.

Poznámka. Hruška je o 10 centů dražší než jablko, a právě o tolik se musí snížit cena banánu, vyměníme-li v uvažovaném nákupu jablko za hrušku. S tímto postřehem lze předchozí diskusi značně zjednodušit.

Z5–I–2

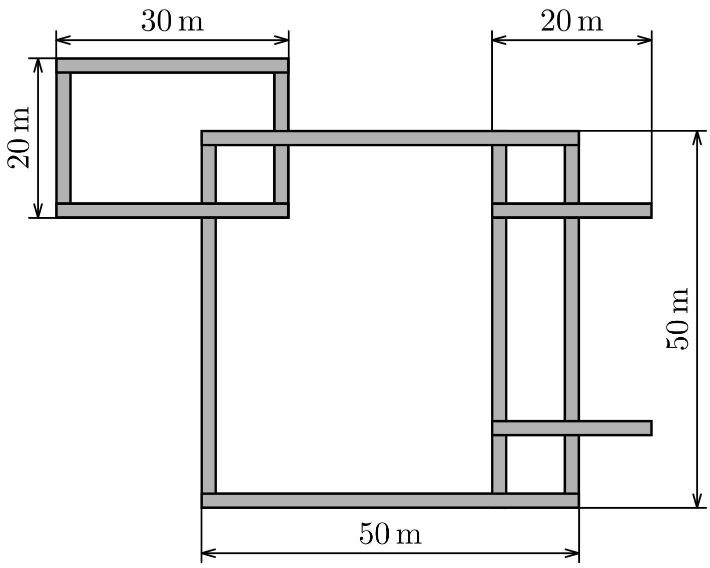
Všechny cesty v parku jsou metr široké a jsou tvořeny celými čtvercovými dlaždicemi o rozměrech metr krát metr, které k sobě těsně přiléhají. Cesty, u kterých se mají vyměnit všechny dlaždice, jsou schematicky znázorněny na obrázku.

Kolik dlaždic se má vyměnit? (*E. Semerádová*)



Nápověda. Potřebujete znát, kde přesně se cesty kříží?

Možné řešení. Přesné umístění křížení cest není ze zadání patrné, to však nemá na výsledek žádný vliv. Při počítání musíme dbát na to, abychom dlaždice v křížení cest stejně jako v rozích započítávali jen jednou. Proto budeme rozlišovat cesty, které jsou zakresleny vodorovně, od těch zakreslených svisle. Jednotlivé části můžeme navíc kvůli lepší názornosti přesouvat. Např. následující soustava cest má stejný počet dlaždic jako ta původní:



Nejprve sečteme dlaždice na vodorovných cestách (shora dolů, zleva doprava):

$$30 + 50 + 30 + 20 + 20 + 50 = 2 \cdot (30 + 50 + 20) = 200.$$

Nyní sečteme dlaždice na svislých cestách, které nejsou započteny v kříženích a rozích (zleva doprava, shora dolů):

$$(20-2)+(50-3)+(20-3)+(50-4)+(50-4)=190-16=174.$$

Celkem se má vyměnit $200+174=374$ dlaždic.

Z5–I–3

Pan král rozdával svým synům dukáty. Nejstaršímu synovi dal určitý počet dukátů, mladšímu dal o jeden dukát méně, dalšímu dal opět o jeden dukát méně a takto postupoval až k nejmladšímu. Poté se vrátil k nejstaršímu synovi, dal mu o jeden dukát méně než před chvílí nejmladšímu a stejným způsobem jako v prvním kole rozdával dál. V tomto kole vyšel na nejmladšího syna jeden dukát. Nejstarší syn dostal celkem 21 dukátů.

Určete, kolik měl král synů a kolik jim celkem rozdal dukátů. (*K. Pazourek*)

Nápověda. Kolik dukátů by dostal nejstarší syn, pokud by král stejným způsobem rozdával např. čtyřem synům?

Možné řešení. Pro konkrétní počet synů si lze králův způsob rozdávání dukátů názorně vyzkoušet. Stačí postupovat odzadu: nejmladší ve druhém kole dostal jeden dukát, druhý nejmladší dva dukáty atd. Např. pro dva, tři, resp. čtyři syny by počty dukátů v jednotlivých kolech vypadaly následovně (řazeno shora dolů podle kol, zleva doprava podle věku):

$$\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 6 & 5 & 4 \\ \hline 3 & 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 8 & 7 & 6 & 5 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Nejstarší syn by v prvním případě dostal 6, ve druhém případě 9, resp. ve třetím případě 12 dukátů. Tímto způsobem lze postupně najít situaci, kdy nejstarší syn dostal 21 dukátů:

$$\begin{array}{ccccccc} 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 \\ \hline 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Tedy král měl 7 synů a celkem jim rozdal 105 dukátů.

Poznámky. Místo zkoušení si lze všimnout, že ze zadání plyne následující: nejstarší syn ve druhém kole dostane právě tolik dukátů, kolik je synů, a v prvním kole dvojnásobek, celkem tedy trojnásobek počtu synů. Aby tento počet byl roven 21, musí být 7 synů a celkový počet dukátů $1+2+\ldots+14=105$.

Součet rozdaných dukátů lze určit různě, viz např. následující zkratku:

$$(1+14)+(2+13)+\ldots+(7+8)=7\cdot 15=105.$$

Z5–I–4

Vojta začal vypisovat do sešitu číslo letošního školního roku 2019202020192020... a tak pokračoval pořád dál. Když napsal 2020 číslic, přestalo ho to bavit.

Kolik tak napsal dvojek? (*L. Růžičková*)

Nápověda. Kolik dvojek by Vojta napsal, kdyby vypisoval jen 20 číslic?

Možné řešení. Číslo školního roku 20192020 je osmimístné a obsahuje tři dvojky. Protože $2020 = 8 \cdot 252 + 4$, Vojta napsal 252krát celé číslo 20192020 a na zbylá čtyři místa číslo 2019.

Celkem tedy Vojta napsal $252 \cdot 3 + 1 = 757$ dvojek.

Z5–I–5

Dědeček má v zahradě tři jabloně a na nich celkem 39 jablek. Jablka rostou jen na osmi větvích: na jedné jabloni plodí dvě větve, na dvou jabloních plodí po třech větvích. Na různých větvích jsou různé počty jablek, ale na každé jabloni je stejný počet jablek.

Kolik jablek mohlo být na jednotlivých větvích? Určete alespoň jednu možnost.

(*A. Bohiniková*)

Nápověda. Kolik jablek bylo na každé z jabloní?

Možné řešení. Na každé jabloni je stejný počet jablek a celkem jich je 39. Na každé jabloni tedy roste 13 jablek. Na různých větvích jsou různé počty jablek a počty větví na jednotlivých stromech jsou 2, 3 a 3.

Tedy hledáme osmice navzájem různých čísel, z nichž vybíráme dvojici a dvě trojice se stejným součet 13. Takové osmice jsou:

$$
\begin{array}{lll}
2, 11, & 1, 5, 7, & 3, 4, 6, \\
3, 10, & 1, 4, 8, & 2, 5, 6, \\
4, 9, & 1, 5, 7, & 2, 3, 8, \\
5, 8, & 1, 2, 10, & 3, 4, 6, \\
5, 8, & 1, 3, 9, & 2, 4, 7.
\end{array}
$$

Z5–I–6

Obdélníkový ubrus je poskládán ze stejně velkých čtverců bílé, šedé a černé barvy, a to tak, že

- čtverce se společnou stranou mají různé barvy,
- bílé čtverce nemají společný vrchol,
- černé čtverce nemají společný vrchol,
- černých čtverců je šest,
- na každé straně ubrusu jsou nejméně tři čtverce.

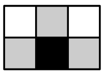
Jak mohl ubrus vypadat? Najděte a nakreslete alespoň tři možnosti.

(*K. Jasenčáková*)

Nápověda. Které čtverce se mohou vyskytovat v jednom řádku, příp. sloupci?

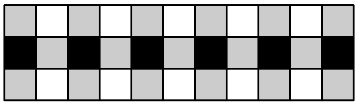
Možné řešení. Na žádném řádku a sloupci nemohou být dva čtverce stejné barvy vedle sebe; budeme diskutovat možnosti po řádcích:

- Pokud by na řádku sousedil bílý a černý čtverec, pak odpovídající čtverce na dalším řádku nelze vybarvit žádnou dvojicí barev tak, abychom vyhověli všem uvedeným požadavkům.
- Pokud by na jednom řádku sousedil bílý a šedý čtverec, pak odpovídající čtverce na druhém řádku musí být šedý a černý (aby se střídaly barvy a bílé čtverce nesousedily vrcholem). Pak ale další čtverec na prvním řádku musí být opět bílý a odpovídají čtverec na druhém řádku šedý (aby se střídaly barvy a černé čtverce nesousedily vrcholem).

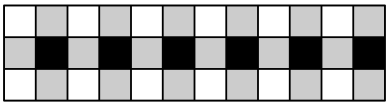


- Diskuse pro sousedící černé a šedé čtverce je obdobná.

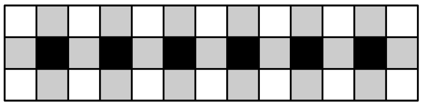
Na každém řádku, příp. sloupci, se tedy střídají buď šedé a bílé, nebo šedé a černé čtverce. Tyto podmínky přesně vymezují vzor na ubruse. Nyní si stačí představit dostatečně velkou oblast s popsaným vzorem a vybrat z ní možné ubrusy vyhovující posledním dvěma podmínkám ze zadání. Takové možnosti jsou následující:



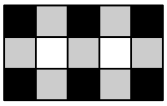
a) 11×3



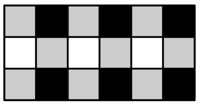
b) 12×3



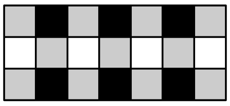
c) 13×3



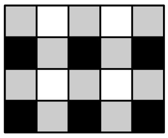
d) 5×3



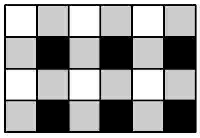
e) 6×3



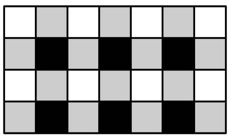
f) 7×3



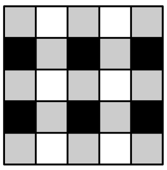
g) 5×4



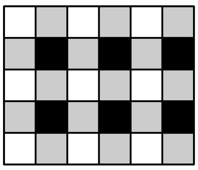
h) 6×4



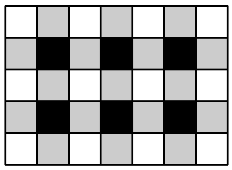
i) 7×4



j) 5×5



k) 6×5



l) 7×5

Ubrus j) je čtvercový, všechny ostatní jsou obdélníkové, tedy vyhovující všem podmínkám úlohy.