I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Babička řekla vnoučatům: „Dnes mám 60 roků a 50 měsíců a 40 týdnů a 30 dnů.“
Kolikáté narozeniny měla babička naposledy? (*L. Hozová*)

Nápověda. Kolik celých let je 50 měsíců?

Možné řešení. 50 měsíců jsou čtyři roky a 2 měsíce. Tedy babička měla alespoň 64 roků. Zbylé 2 měsíce, 40 týdnů a 30 dnů představují zhruba jeden další rok. Potřebujeme přesně zjistit, zda je to více či méně, proto uvedené údaje přepočítáme na dny.

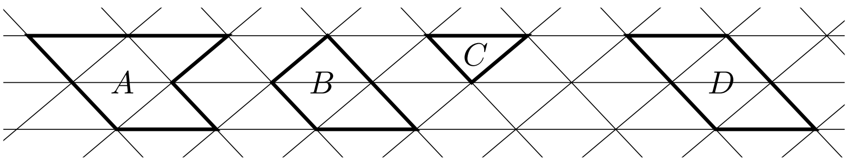
2 měsíce mohou mít 59 dnů (leden a únor, příp. únor a březen v nepřestupném roce), 60 dnů (leden a únor, příp. únor a březen v přestupném roce), 61 dnů (skoro všechny ostatní dvojice měsíců), nebo 62 dnů (červenec a srpen, příp. prosinec a leden). 40 týdnů a 30 dnů je $40 \cdot 7 + 30 = 310$ dnů.

Celkem tedy 2 měsíce, 40 týdnů a 30 dnů představují nejméně 369 a nejvíce 372 dnů. To je vždy více než rok (a méně než dva). Babička měla naposledy 65. narozeniny.

Z6–I–2

Na obrázku je trojúhelníková síť a v ní čtyři mnohoúhelníky. Obvody mnohoúhelníků A, B a D jsou po řadě 56 cm, 34 cm a 42 cm.

Určete obvod trojúhelníku C. (*K. Pazourek*)



Nápověda. Jaká je délka jedné vodorovné úsečky trojúhelníkové sítě?

Možné řešení. Obvody mnohoúhelníků A a B se liší o dvě vodorovné úsečky, což odpovídá $56 - 34 = 22$ (cm). Jedna vodorovná úsečka je tedy 11 cm dlouhá.

Obvod mnohoúhelníku D je tvořen dvěma vodorovnými úsečkami (—) a čtyřmi zpětně šikmými úsečkami (\), což dává dohromady 42 cm. Tyto čtyři zpětně šikmé úsečky mají v součtu $42 - 22 = 20$ (cm), tedy jedna je 5 cm dlouhá.

Obvod mnohoúhelníku B je tvořen jednou vodorovnou (—), třemi zpětně šikmými (\) a jednou šikmou (/) úsečkou, což je 34 cm. Jedna šikmá úsečka je proto dlouhá $34 - 11 - 3 \cdot 5 = 8$ (cm).

Obvod trojúhelníku C je roven $11 + 5 + 8 = 24$ (cm).

Z6–I–3

Na písemce bylo 25 úloh trojího druhu: lehké po 2 bodech, středně těžké po 3 bodech a těžké po 5 bodech. Správně vyřešené úlohy byly hodnoceny uvedeným počtem bodů podle stupně obtížnosti, jinak 0. Nejlepší možné celkové hodnocení písemky bylo 84 bodů. Petr správně vyřešil všechny lehké úlohy, polovinu středně těžkých a třetinu těžkých.

Kolik bodů získal Petr za svoji písemku? (*A. Bohiniková*)

Nápověda. Mohly být v testu právě čtyři těžké úlohy?

Možné řešení. Ze zadání vyplývá, že v písemce byl sudý počet středně těžkých úloh a počet těžkých úloh byl násobkem tří. Budeme postupně uvažovat možné počty těžkých úloh a diskutovat důsledky:

- Pokud by těžké úlohy byly 3, potom by středně těžkých a lehkých úloh bylo dohromady $25 - 3 = 22$ a jejich nejlepší možné hodnocení by bylo $84 - 3 \cdot 5 = 69$ bodů. To však není možné, protože středně těžkých úloh byl sudý počet a lehké úlohy byly hodnoceny po 2 bodech, avšak 69 není sudé číslo. (Jiným důvodem může být, že ani 22 středně těžkých úloh by nedalo 69 bodů.)
- Pokud by těžkých úloh bylo 6, potom by středně těžkých a lehkých úloh bylo dohromady $25-6 = 19$ a jejich nejlepší možné hodnocení by bylo $84-6\cdot 5 = 54$ bodů. Kdyby středně těžké i lehké úlohy byly hodnoceny stejně po 2 bodech, potom by těchto 19 úloh bylo hodnoceno $2 \cdot 19 = 38$ body, což je o 16 méně než 54. Protože rozdíl v hodnocení středně těžkých a lehkých úloh je právě jeden bod, odpovídá předchozí rozdíl 16 právě počtu středně těžkých úloh. Lehkých úloh by potom bylo $19 - 16 = 3$. V takovém případě by Petr správně vyřešil 3 lehké úlohy, 8 středně těžkých a 2 těžké. Za takovou písemku by získal
$$3 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 40 \text{ bodů.}$$
- Pokud by těžkých úloh bylo 9, potom by středně těžkých a lehkých úloh bylo dohromady $25 - 9 = 16$ a jejich nejlepší možné hodnocení by bylo $84 - 9 \cdot 5 = 39$ bodů. To však není možné ze stejného důvodu jako v prvním diskutovaném případě.
- Pokud by těžkých úloh bylo 12, potom by středně těžkých a lehkých úloh bylo dohromady $25 - 12 = 13$ a jejich nejlepší možné hodnocení by bylo $84 - 12 \cdot 5 = 24$ bodů. To však není možné, neboť už 13 lehkých úloh odpovídá 26 bodům, což je víc než 24.
- Dále není nutné pokračovat, protože právě pozorovaný rozdíl v hodnocení by se jenom zvětšoval.

Vychází jediná možnost, a to, že Petr získal 40 bodů.

Poznámka. Kterýkoli argument v předchozí diskusi lze nahradit systematickým zkoušením a ověřováním podmínek ze zadání. Úplná diskuse v tomto duchu je velmi pracná, nemůže být v této kategorii vyžadována, ale měla by být uspokojivě naznačena. Při hodnocení úlohy tento požadavek zohledněte.

Z6–I–4

Jednou si král zavolal všechna svá pážata a postavil je do řady. Prvnímu pážeti dal určitý počet dukátů, druhému dal o dva dukáty méně, třetímu opět o dva dukáty méně a tak dále. Když došel k poslednímu pážeti, dal mu příslušný počet dukátů, otočil se a obdobným způsobem postupoval na začátek řady (tj. předposlednímu pážeti dal o dva dukáty méně než před chvílí poslednímu atd.). Na první páže v tomto kole vyšly dva dukáty. Poté jedno z pážat zjistilo, že má 32 dukátů.

Kolik mohl mít král pážat a kolik celkem jim mohl rozdat dukátů? Určete všechny možnosti. (*K. Pazourek*)

Nápověda. Kolikrát které páže dostávalo dukáty?

Možné řešení. Poslední páže dostávalo dukáty pouze jednou, kdežto ostatní pážata dvakrát.

Přitom předposlední páže dostalo dvojnásobek toho, co poslední: nejprve o 2 dukáty více než poslední, poté o 2 dukáty méně.

Všichni kromě posledního pážete dostali stejně: nejprve dostal každý o 2 dukáty více než následující soused v řadě, poté o 2 dukáty méně než týž soused.

Navíc počet dukátů posledního pážete byl dvojnásobkem počtu pážat: král postupně snižoval příspěvek o 2 dukáty a ve druhém kole dostalo první páže 2 dukáty.

Jsou tedy dvě možnosti:

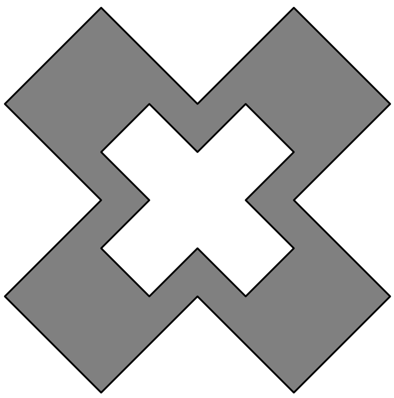
- 32 dukátů mělo poslední páže. Tedy pážat bylo 16 a každé z 15 ostatních pážat mělo 64 dukátů. Král celkem rozdal $15 \cdot 64 + 32 = 992$ dukátů.
- 32 dukátů měla všechna pážata kromě posledního. Tedy poslední mělo 16 dukátů a pážat bylo 8. Král celkem rozdal $7 \cdot 32 + 16 = 240$ dukátů.

Král mohl mít 16 pážat a rozdat 992 dukátů, nebo 8 pážat a 240 dukátů.

Z6–I–5

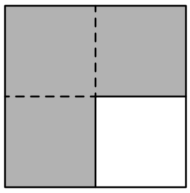
Útvar na obrázku vznikl tak, že z velkého kříže byl vystřižen malý kříž. Každý z těchto křížů může být složen z pěti shodných čtverců, přičemž strany malých čtverců jsou poloviční vzhledem ke stranám velkých čtverců. Obsah šedého útvaru na obrázku je $45\,\mathrm{cm}^2$.

Jaký je obsah velkého kříže? (*L. Růžičková*)



Nápověda. Kolikrát se vejde malý čtverec do velkého?

Možné řešení. Délka strany velkého čtverce je dvojnásobkem délky strany malého čtverce, proto je obsah velkého čtverce čtyřnásobkem obsahu malého čtverce, viz obrázek. Pokud z velkého čtverce odstraníme malý čtverec, zbylý útvar má obsah $\frac{3}{4}$ velkého čtverce. Tedy velký čtverec má obsah $\frac{4}{3}$ zbylého útvaru.



Útvar v zadání úlohy vznikl odebráním pěti malých čtverců od pěti velkých čtverců (přičemž přesné umístění čtverců není pro určování obsahů podstatné). Vztahy mezi jejich obsahy jsou tudíž stejné jako ve výše diskutovaném případě. Obsah velkého kříže je roven

$$\frac{4}{3} \cdot 45 = 60\,(\mathrm{cm}^2).$$

Poznámka. Pokud S značí obsah malého čtverce, potom obsah malého kříže je $5S$, obsah velkého čtverce je $4S$ a velkého kříže je $20S$. Obsah vystřiženého útvaru je $(20 - 5)S = 15S = 45\,\mathrm{cm}^2$, tedy $S = 3\,\mathrm{cm}^2$ a obsah velkého kříže je $20 \cdot 3 = 60\,(\mathrm{cm}^2)$.

Z6–I–6

Majka zkoumala vícemístná čísla, ve kterých se pravidelně střídají liché a sudé číslice. Ta, která začínají lichou číslicí, nazvala komická a ta, která začínají sudou číslicí, nazvala veselá. (Např. číslo 32387 je komické, číslo 4529 je veselé.)

Mezi trojmístnými čísly určete, zda je víc komických nebo veselých, a o kolik.

(*M. Dillingerová*)

Nápověda. Kolik je trojciferných komických čísel začínajících 12? A kolik jich začíná jedničkou?

Možné řešení. Jak lichých, tak sudých číslic je pět. U komických čísel může na prvním místě být kterákoli z lichých číslic 1, 3, 5, 7, 9. Pro každou z těchto pěti možností, může na druhém místě být kterákoli ze sudých číslic 0, 2, 4, 6, 8, což dává $5 \cdot 5 = 25$ možností. Pro každou z těchto 25 možností, může na třetím místě být kterákoli z lichých číslic, což dává $25 \cdot 5 = 125$ možností. Trojmístných komických čísel je 125.

Počítání trojmístných veselých čísel je obdobné, jenom na prvním místě nemůže být 0. Trojmístných veselých čísel tedy je $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$.

Trojmístných komických čísel je o 25 víc než veselých.