I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Sněhurka se sedmi trpaslíky nasbírali šišky na táborák. Sněhurka řekla, že počet všech šišek je číslo dělitelné dvěma. První trpaslík prohlásil, že je to číslo dělitelné třemi, druhý trpaslík řekl, že je to číslo dělitelné čtyřmi, třetí trpaslík řekl, že je to číslo dělitelné pěti, čtvrtý trpaslík řekl, že je to číslo dělitelné šesti, pátý trpaslík řekl, že je to číslo dělitelné sedmi, šestý trpaslík řekl, že je to číslo dělitelné osmi, sedmý trpaslík řekl, že je to číslo dělitelné devíti. Dva z osmi sběračů, kteří se k počtu šišek vyjadřovali bezprostředně po sobě, neměli pravdu, ostatní ano.

Kolik šišek bylo na hromadě, pokud jich jistě bylo méně než 350? (*L. Hozová*)

Nápověda. Která čísla jsou dělitelná čtyřmi a přitom nejsou dělitelná dvěma?

Možné řešení. Počet šišek je číslo menší než 350, které není dělitelné právě jednou dvojicí po sobě jdoucích čísel z 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a všemi ostatními ano. Žádná z dvojic $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$, $(5,6)$ a $(6,7)$ to být nemůže, neboť by se mezi zbylými čísly vždy našlo nějaké další, kterým by počet šišek také nemohl být dělitelný:

- nedělitelnost 2 vynucuje nedělitelnost 4, 6 a 8,
- nedělitelnost 3 vynucuje nedělitelnost 6 a 9,
- nedělitelnost 4 vynucuje nedělitelnost 8,
- nedělitelnost 6 vynucuje nedělitelnost 2 nebo 3.

Počet šišek není dělitelný buď dvojicí čísel $(7,8)$, nebo $(8,9)$, a všemi ostatními čísly ano. Tento počet pak musí být dělitelný také nejmenším společným násobkem ostatních čísel:

- V prvním případě je nejmenší společný násobek čísel 2, 3, 4, 5, 6, 9 roven $4 \cdot 5 \cdot 9 = 180$. Jediný násobek 180 menší než 350 je právě 180.
- Ve druhém případě je nejmenší společný násobek čísel 2, 3, 4, 5, 6, 7 roven $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 420$, což je víc než 350.

Sněhurka s trpaslíky nasbírali 180 šišek.

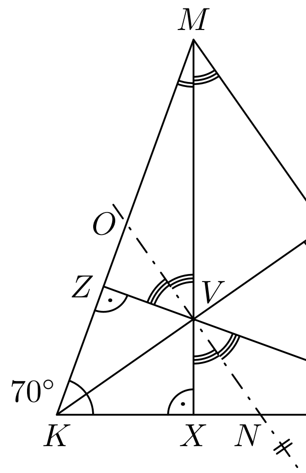
Z7–I–2

V ostroúhlém trojúhelníku KLM je V průsečík jeho výšek a X je pata výšky na stranu KL. Osa úhlu XVL je rovnoběžná se stranou LM a úhel MKL má velikost $70°$.

Jakou velikost mají úhly KLM a KML? (*L. Hozová*)

Nápověda. Znázorněte si situaci za zadání a hledejte shodné úhly.

Možné řešení. V daném trojúhelníku označíme Y, Z paty ostatních výšek a N, O průsečíky osy úhlu XVL se stranami KL, KM, viz obrázek. V obrázku také vyznačujeme navzájem shodné úhly:



V pravoúhlém trojúhelníku KZL známe úhly u vrcholů K a Z, tedy úhel u vrcholu L má velikost $180° - 90° - 70° = 20°$. Obdobně velikost úhlu u vrcholu M v pravoúhlém trojúhelníku KXM je $20°$. Úhly KLZ a KMX jsou proto shodné.

Přímky NO a LM jsou rovnoběžné, proto jsou úhly MLZ, LVN a OVZ navzájem shodné (střídavé a souhlasné úhly). Z obdobného důvodu jsou také úhly LMX, MVO a NVX navzájem shodné. Přímka NO je osou úhlu XVL, proto jsou úhly LVN a NVX — a tedy i všechny ostatní před chvílí jmenované úhly — navzájem shodné.

Celkem tedy úhly KLM a KML jsou shodné. To jsou vnitřní úhly v trojúhelníku KLM, jehož třetí úhel známe. Velikosti úhlů KLM a KML jsou $(180° - 70°) : 2 = 55°$.

Poznámky. Shodnost úhlů KLM a KML znamená, že trojúhelník KLM je rovnoramenný se základnou LM. Tento fakt lze přímo odvodit následovně:

Přímka NO je rovnoběžná se stranou LM, tudíž je kolmá k výšce na tuto stranu. Protože přímka NO je osou úhlu XVL, jsou úhly NVX a OVZ shodné, a protože je tato přímka kolmá k výšce KY, jsou také úhly KVX a KVZ shodné. Trojúhelníky KVX a KVZ jsou pravoúhlé a mají shodné úhly u vrcholu V, proto mají shodné úhly také u vrcholu K. Tedy výška KY je osou úhlu LKM, což znamená, že trojúhelník KLM je rovnoramenný se základnou LM.

K velikostem konkrétních úhlů lze dojít různými způsoby, viz např. následující úvahu:

Trojúhelníky KZL a VXL jsou pravoúhlé a mají společný úhel u vrcholu L. Vnitřní úhly těchto trojúhelníků u vrcholů K a V jsou proto shodné a mají velikost $70°$ (ze zadání). Přímka VN je osou úhlu XVL, tedy úhel NVX má velikost $35°$ $(70 : 2 = 35)$. Velikost úhlu u vrcholu N v trojúhelníku NVX je $55°$ $(90-35 = 55)$. Přímky VN a LM jsou rovnoběžné, tedy úhly XNV a KLM jsou shodné (souhlasné úhly). Velikost úhlu KLM je $55°$.

Z7–I–3

Roman má rád kouzla a matematiku. Naposled kouzlil s trojmístnými nebo čtyřmístnými čísly takto:

- z daného čísla vytvořil dvě nová čísla tak, že ho rozdělil mezi číslicemi na místě stovek a desítek (např. z čísla 581 by dostal 5 a 81),
- nová čísla sečetl a zapsal výsledek (v uvedeném příkladu by dostal 86),

- od většího z nových čísel odečetl menší a výsledek zapsal za předchozí součet, čímž vykouzlil výsledné číslo (v uvedeném příkladu by dostal 8676).

Z kterých čísel mohl Roman vykouzlit a) 171, b) 1513? Určete všechny možnosti.

Jaké největší číslo lze takto vykouzlit a z kterých čísel může vzniknout? Určete všechny možnosti. (*M. Dillingerová*)

Nápověda. Jakou roli hrají nuly v Romanových číslech?

Možné řešení. Po rozdělení původního čísla měl Roman dvě nanejvýš dvojmístná čísla. Jejich součet tedy může být jednomístné, dvojmístné nebo trojmístné číslo. Jejich rozdíl může být 0, jednomístné nebo dvojmístné číslo. Přitom součet je vždy větší než rozdíl.

Číslo 171 mohl Roman dostat jedině tak, že součet čísel po rozdělení původního čísla byl 17 a rozdíl 1. Tedy sčítal a odečítal čísla 9 a 8. Číslo 171 mohl Roman vykouzlit buď z čísla 908, nebo z čísla 809.

Číslo 1513 mohl Roman dostat dvěma způsoby:

- Součet čísel po rozdělení původního čísla byl 15 a rozdíl 13. Tedy sčítal a odečítal čísla 14 a 1.
- Součet čísel po rozdělení původního čísla byl 151 a rozdíl 3. Tedy sčítal a odečítal čísla 77 a 74.

Číslo 1513 mohl Roman vykouzlit z některého z čísel 1401, 114, 7774, nebo 7477.

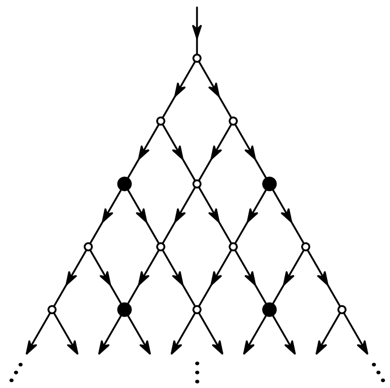
Výsledné číslo je alespoň dvojmístné a nanejvýš pětimístné. Pětimístné číslo vznikne složením trojmístného součtu a dvojmístného rozdílu dvojice čísel po rozdělení původního čísla. Aby výsledné číslo bylo největší možné, musí být pomocný součet největší možný, tedy rozdíl nejmenší možný (ale dvojmístný). Tyto požadavky vymezují dvojici 99 a 89: $99 + 89 = 188$ a $99 - 89 = 10$, výsledné číslo je 18810, a to je možné vykouzlit buď z čísla 9989, nebo z čísla 8999.

Z7–I–4

Jeníčka a Mařenku zaujalo vodní dílo, jehož část je znázorněna na obrázku. Koryta se postupně rozdělují a zase spojují v naznačených bodech, v každé řadě je o jeden takový bod víc než v řadě předchozí. Voda proudí v naznačených směrech a při každém větvení se vodní tok rozdělí do dvou koryt se stejným průtokem.

Jeníčka zajímalo, kolik vody protéká v součtu čtyřmi místy zvýrazněnými černě. Mařenku zajímalo, kolik vody protéká v součtu všemi místy, která jsou ve 2019. řadě.

Porovnejte celkové průtoky Jeníčkovými a Mařenčinými místy. (*K. Jasenčáková*)



Nápověda. Kolik vody protékalo všemi místy ve druhé řadě a kolik ve třetí řadě?

Možné řešení. Protože se voda v korytech jenom dělí a zase spojuje (nikam se neztrácí a nic nepřibývá), je součet průtoků všemi místy v každé řadě stejný jako na začátku. Tedy Mařenka v 2019. řadě pozoruje stejný průtok, který by pozorovala na začátku.

Pro určení průtoků v Jeníčkových vyznačených místech budeme postupně probíhat koryty a značit, jaké části původního průtoku jsou v jednotlivých uzlech. Podle zadání každé koryto přivádí do vybraného uzlu polovinu průtoku z uzlu předchozího. Shora postupně zjišťujeme následující výsledky (které kvůli lepší přehlednosti neupravujeme do základního tvaru):

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & \\
 & & \mathbf{\frac{1}{4}} & & \frac{2}{4} & & \mathbf{\frac{1}{4}} & & \\
 & \frac{1}{8} & & \frac{3}{8} & & \frac{3}{8} & & \frac{1}{8} & \\
\frac{1}{16} & & \mathbf{\frac{4}{16}} & & \frac{6}{16} & & \mathbf{\frac{4}{16}} & & \frac{1}{16}
\end{array}
$$

Průtoky Jeníčkovými místy ve třetí, resp. páté řadě tvoří $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, resp. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ průtoku na začátku. Celkem tedy součet průtoků všemi čtyřmi Jeníčkovými místy je stejný jako na začátku. Celkové průtoky Jeníčkovými a Mařenčinými místy jsou stejné.

Poznámka pro řešitele. Vzpomeňte na tuto úlohu, až časem uslyšíte o tzv. Pascalově trojúhelníku.

Z7–I–5

Hvězdný čtverec je taková čtvercová tabulka čísel, pro kterou platí, že součty čísel v jednotlivých řádcích a sloupcích jsou stále stejné. Na obrázku je pozůstatek hvězdného čtverce, v němž byla čísla v jednom řádku a jednom sloupci smazána.

1	2	3	
4	5	6	
7	8	9	

Doplňte chybějící čísla tak, aby všechna byla celá a právě čtyři záporná. Určete všechny možnosti. (*E. Semerádová*)

Nápověda. Jaké jsou součty zbylých čísel v řádcích a sloupcích?

Možné řešení. Pokud součet čísel v jednotlivých řádcích a sloupcích označíme s, potom chybějící čísla ve hvězdném čtverci jsou

1	2	3	$s-6$
4	5	6	$s-15$
7	8	9	$s-24$
$s-12$	$s-15$	$s-18$	$-2s+45$

Číslo $s-6$ je záporné pro $s<6$; podobně pro další doplněná čísla kromě $-2s+45$, které je záporné pro $s>\frac{45}{2}$. Právě čtyři záporná celá čísla dostáváme pro $s=12$, 13 nebo 14:

1	2	3	6
4	5	6	−3
7	8	9	−12
0	−3	−6	21

1	2	3	7
4	5	6	−2
7	8	9	−11
1	−2	−5	19

1	2	3	8
4	5	6	−1
7	8	9	−10
2	−1	−4	17

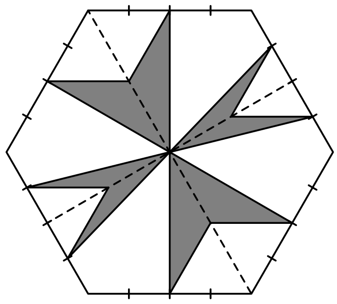
Poznámka. Místo obecných výrazů s neznámou s lze začít doplněním konkrétních hodnot tak, aby čísla v tabulce tvořila hvězdný čtverec. Postupným zvětšováním, příp. zmenšováním dílčích součtů lze odvodit výše uvedená doplnění, ve kterých jsou právě čtyři záporná čísla.

Z7–I–6

Z pravidelného šestiúhelníku byl vystřižen útvar jako na obrázku. Přitom vyznačené body jak na obvodu, tak uvnitř šestiúhelníku dělí příslušné úsečky na čtvrtiny.

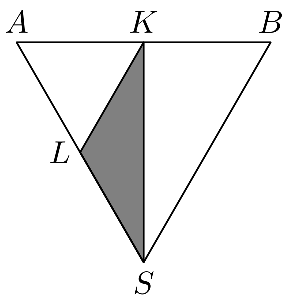
Jaký je poměr obsahů původního šestiúhelníku a vystřiženého útvaru?

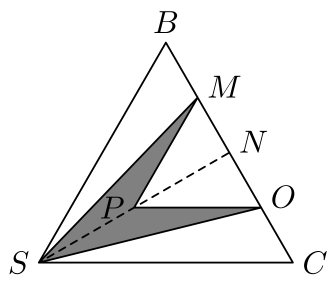
(*A. Bohiniková*)



Nápověda. Rozdělte si útvar na vhodné menší části.

Možné řešení. Šestiúhelník je tvořen šesti shodnými rovnostrannými trojúhelníky. Vystřižené šedé útvary v těchto trojúhelnících jsou dvojího typu:





V prvním případě je K středem úsečky AB a L je středem úsečky SA. Trojúhelníky SKL a SKA mají stejnou výšku ze společného vrcholu K a odpovídající strana SL je poloviční vzhledem ke straně SA. Proto má trojúhelník SKL poloviční obsah vzhledem k trojúhelníku SKA. Z obdobného důvodu má trojúhelník SKA poloviční obsah vzhledem k trojúhelníku SBA. Celkem má šedá část čtvrtinový obsah vzhledem k trojúhelníku SBA.

Ve druhém případě je N středem úsečky BC, M je středem úsečky BN, O je středem úsečky NC a P je středem úsečky NS. Stejně jako v předchozím případě zdůvodníme, že trojúhelník SMP má poloviční obsah vzhledem k trojúhelníku SMN, ten má poloviční obsah vzhledem k trojúhelníku SBN, a ten má poloviční obsah vzhledem k trojúhelníku SBC. Celkem trojúhelník SMP má osminový obsah vzhledem k trojúhelníku SBC. Trojúhelník SOP je shodný s trojúhelníkem SMP. Celkem má šedá část čtvrtinový obsah vzhledem k trojúhelníku SBC.

Pro každý ze šesti pomocných trojúhelníků platí, že poměr jeho obsahu a obsahu šedého útvaru je 4 : 1. Poměr obsahů původního šestiúhelníku a vystřiženého útvaru je proto tentýž.