I. kolo kategorie Z8

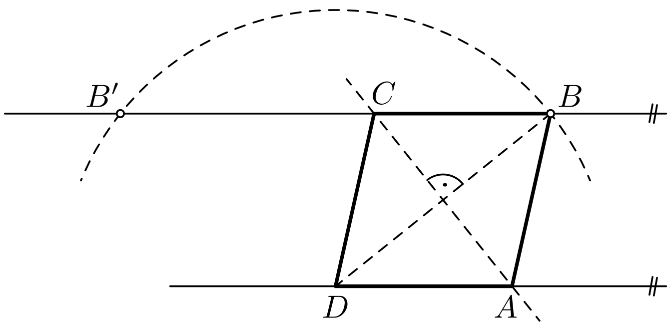
Z8–I–1

Sestrojte kosočtverec $ABCD$ tak, aby jeho úhlopříčka BD měla velikost 8 cm a vzdálenost vrcholu B od přímky AD byla 5 cm. Určete všechny možnosti. (*K. Pazourek*)

Nápověda. Jaké vlastnosti mají úhlopříčky kosočtverce?

Možné řešení. Vzdálenost bodu B od přímky AD je stejná jako vzdálenost bodu C od AD, neboť BC a AD jsou rovnoběžné. Úhlopříčky v každém rovnoběžníku se navzájem půlí, v kosočtverci jsou navíc kolmé. Tyto postřehy stačí k sestrojení kosočtverce $ABCD$:

- sestrojíme dvě rovnoběžné přímky ve vzdálenosti 5 cm (např. jako kolmice v koncových bodech úsečky délky 5 cm),
- na jedné přímce zvolíme bod D a sestrojíme kružnici se středem D a poloměrem 8 cm,
- průnikem této kružnice s druhou přímkou je bod B, resp. B',
- sestrojíme osu úsečky DB, resp. DB' (např. pomocí průsečíků dvou shodných kružnic se středy v koncových bodech),
- průniky této přímky s rovnoběžkami jsou body A a C, resp. A' a C',
- čtyřúhelník $ABCD$, resp. $A'B'C'D$, je kosočtverec s požadovanými vlastnostmi.

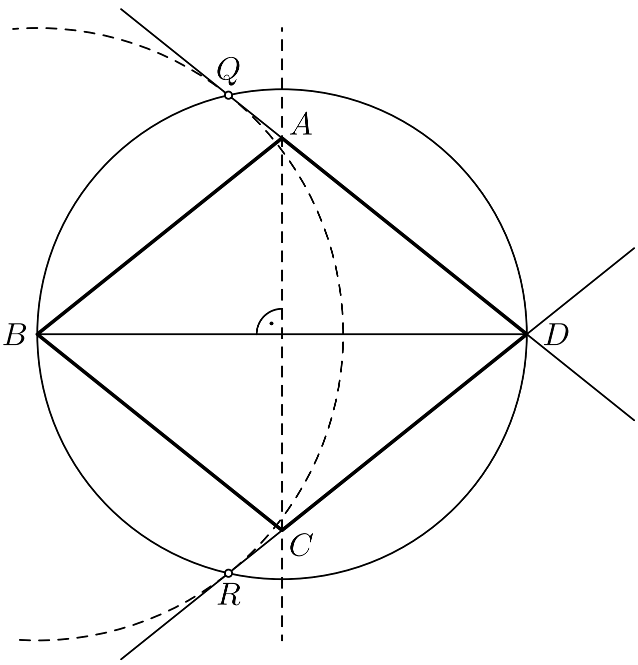


Všechny sestrojené kosočtverce jsou shodné, úloha má až na shodnost jediné řešení.

Poznámka. Konstrukci je možné začít sestrojením úsečky BD a její osy. Pokud dokážeme sestrojit přímky jdoucí bodem D ve vzdálenosti 5 cm od B, potom jejich průsečíky s osou úsečky BD budou zbylé vrcholy A a C kosočtverce (vzdálenosti bodu B od přímek AD a CD jsou stejné, neboť to jsou velikosti výšek na příslušné strany kosočtverce). Takové přímky lze sestrojit takto:

- sestrojíme kružnici nad průměrem BD,
- sestrojíme kružnici se středem B a poloměrem 5 cm,
- spojnice průsečíků Q a R těchto kružnic s bodem D jsou hledané přímky.

Zdůvodnění plyne z Thaletovy věty: úhly BQD a BRD jsou pravé, tedy úsečky DQ a DR jsou výšky na příslušné strany.



Z8–I–2

Richard si pohrával s dvěma pětimístnými čísly. Každé sestávalo z navzájem různých číslic, které u jednoho byly všechny liché a u druhého všechny sudé. Po chvíli zjistil, že součet těchto dvou čísel začíná dvojčíslím 11 a končí číslem 1 a že jejich rozdíl začíná číslem 2 a končí dvojčíslím 11.

Určete Richardova čísla. (*M. Dillingerová*)

Nápověda. Kolikamístné mohou být součty a rozdíly pětimístných čísel a jak byste je ručně počítali?

Možné řešení. Součet dvou pětimístných čísel může být pětimístný nebo šestimístný. Pětimístné součty však nemohou začínat číslicí 1, tedy součet je šestimístný. Rozdíl dvou pětimístných čísel může být nejvýše pětimístný. Kvůli snadnějšímu vyjadřovaní si Richardova čísla označíme:

$$
\begin{array}{r}
A\,B\,C\,D\,E \\
+\;a\;\;b\;\;c\;\;d\;\;e \\
\hline
1\;1\;*\;*\;*\;1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
A\,B\,C\,D\,E \\
-\;a\;\;b\;\;c\;\;d\;\;e \\
\hline
\;\;*\;1\;1
\end{array}
$$

Různá písmena představují různé číslice, velká odpovídají sudým, malá lichým, nebo naopak. Protože číslic je 10, budou v Richardových číslech použity všechny.

Aby součet začínal dvojčíslím 11, musí být $A + a$ buď 11, nebo 10 (s přechodem přes desítku). Avšak součet sudého a lichého čísla je liché číslo, tedy musí být $A + a = 11$.

Pokud by rozdíl byl nejvýše čtyřmístný, potom by $A - a$ muselo být nejvýše 1. Avšak rozdíl sudého a lichého čísla je liché číslo, tedy by muselo být $A - a = 1$. Odtud a z předchozího $A + a = 11$ vychází

$$A = 6, \quad a = 5.$$

Pokud by rozdíl byl pětimístný a začínal 2, potom by $A - a$ muselo být buď 2, nebo 3 (přechod přes desítku). Avšak rozdíl sudého a lichého čísla je liché číslo, tedy by muselo být $A - a = 3$. Odtud a z předchozího $A + a = 11$ vychází

$$A = 7, \quad a = 4.$$

Aby součet končil číslicí 1, musí být buď $E + e = 1$, nebo $E + e = 11$. Aby rozdíl končil číslicí 1, musí být buď $E - e = 1$, nebo $E = 0$ a $e = 9$. Předchozí dvě podmínky jsou splněny současně buď pro

$$E = 6, \quad e = 5,$$

nebo pro

$$E = 1, \quad e = 0.$$

Předchozí diskuse dává čtyři možnosti přiřazení prvních a posledních číslic Richardových čísel. Aby byly splněny základní požadavky (tj. aby se žádná číslice neopakovala a aby jedno číslo bylo tvořeno lichými a druhé sudými číslicemi), musí být $A = 7$, $a = 4$, $E = 1$ a $e = 0$:

$$\begin{array}{r} 7\,B\,C\,D\,1 \\ +\ 4\ b\ c\ d\ 0 \\ \hline 1\ 1\ *\ *\ *\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\,B\,C\,D\,1 \\ -\ 4\ b\ c\ d\ 0 \\ \hline 2\ *\ *\ 1\ 1 \end{array}$$

Aby v součtu byla na druhém místě 1, musí být $B + b < 10$, a aby rozdíl začínal 2, musí být $B < b$. Ze zbylých číslic těmto podmínkám vyhovuje jedině $B = 3$ a $b = 6$. Aby v rozdílu byla na předposledním místě 1, musí být $D - d = 1$. Ze zbylých číslic této podmínce vyhovuje jedině $D = 9$ a $d = 8$. Na poslední dvě místa tak zbývá $C = 5$ a $c = 2$.

Richardova čísla byla 73591 a 46280, předchozí výpočty vychází následovně:

$$\begin{array}{r} 7\ 3\ 5\ 9\ 1 \\ +\ 4\ 6\ 2\ 8\ 0 \\ \hline 1\ 1\ 9\ 8\ 7\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\ 3\ 5\ 9\ 1 \\ -\ 4\ 6\ 2\ 8\ 0 \\ \hline 2\ 7\ 3\ 1\ 1 \end{array}$$

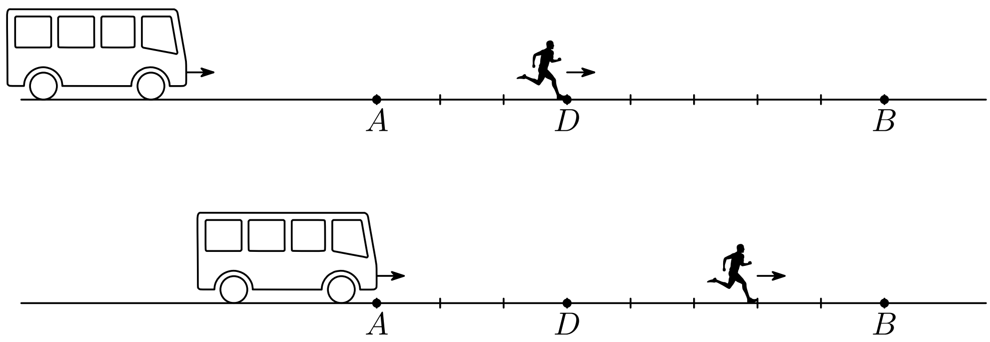
Z8–I–3

Vendelín bydlí mezi dvěma zastávkami autobusu, a to ve třech osminách jejich vzdálenosti. Dnes vyrazil z domu a zjistil, že ať by utíkal k jedné, nebo druhé zastávce, dorazil by na zastávku současně s autobusem. Průměrná rychlost autobusu je 60 km/h.

Jakou průměrnou rychlostí dnes běží Vendelín? (*L. Hozová*)

Nápověda. Znázorněte si situaci na přímce a uvažte oba případy zvlášť.

Možné řešení. Označme první zastávku na trase autobusu A, druhou B, Vendelínův dům D. Kdyby Vendelín běžel do A, tak než tam autobus dojede, uběhne právě vzdálenost DA. Kdyby Vendelín běžel do B, tak než autobus dojede do A, uběhne stejnou vzdálenost DA směrem k B. Nejpozději tady si uvědomujeme, že D musí být blíž A, a to ve třech osminách vzdálenosti AB:



Tedy při běhu do B bude v momentě, kdy autobus bude v A, Vendelínovi do cíle chybět $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ vzdálenosti AB. Aby do B dorazil současně s autobusem, musí mít čtvrtinovou rychlost vzhledem k autobusu. Vendelín běží průměrnou rychlostí $60 : 4 = 15\,(\mathrm{km/h})$.

Z8–I–4

Pro pětici celých čísel platí, že když k prvnímu přičteme jedničku, druhé umocníme na druhou, od třetího odečteme trojku, čtvrté vynásobíme čtyřmi a páté vydělíme pěti, dostaneme pokaždé stejný výsledek.

Najděte všechny takové pětice čísel, jejichž součet je 122. (*L. Dedková*)

Nápověda. Jaké vlastnosti má číslo, které je výsledkem popsaných operací?

Možné řešení. Výsledek popsaných operací s každým z pěti čísel je stále stejný, a ten si označíme n. Potom první až páté číslo je po řadě

$$n-1, \quad \sqrt{n}, \quad n+3, \quad \frac{n}{4}, \quad 5n.$$

Z druhého a čtvrtého čísla zjišťujeme důležitá omezení, totiž že n je druhou mocninou přirozeného čísla a že je dělitelné čtyřmi.

Nejmenší číslo s těmito vlastnostmi je $n = 4$; v takovém případě by součet čísel byl

$$3 + 2 + 7 + 1 + 20 = 33,$$

což je málo. Další číslo s uvedenými vlastnostmi je $n = 16$; v takovém případě by součet čísel byl

$$15 + 4 + 19 + 4 + 80 = 122,$$

což je požadovaný výsledek. Další možnosti není třeba zkoušet, neboť s rostoucím n roste i celkový součet. Jediným řešením úlohy je pětice 15, 4, 19, 4, 80.

Jiné řešení. Pětici hledaných čísel označíme a, b, c, d, e. Ze zadání vyplývá, že

$$a + 1 = b^2 = c - 3 = 4d = \frac{e}{5}.$$

Aby $d = \frac{b^2}{4}$ bylo celé, musí být b^2 násobkem 4, tedy b musí být násobkem 2. To vyjádříme tak, že $b = 2k$, pro nějaké celé k. Z uvedených rovností vyvozujeme, že

$$a = 4k^2 - 1, \quad b = 2k, \quad c = 4k^2 + 3, \quad d = k^2, \quad e = 20k^2.$$

Součet všech těchto čísel je $s = 29k^2+2k+2$. Pro dostatečně velké absolutní hodnoty k (tj. bez ohledu na znaménko) bude součet větší než 122 a dál se bude strmě zvětšovat. Postupným zkoušením zjišťujeme následující:

k	$\leqq -3$	-2	-1	0	1	2	$\geqq 3$
s	$\geqq 257$	114	29	2	33	122	$\geqq 269$

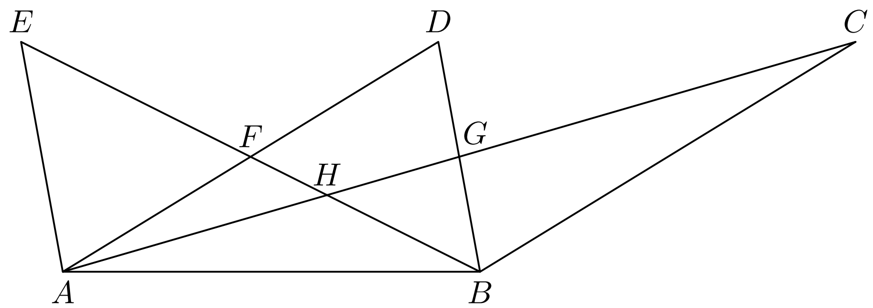
Součet je roven 122 právě pro $k = 2$, což určuje pětici čísel

$$a = 15, \quad b = 4, \quad c = 19, \quad d = 4, \quad e = 80.$$

Z8–I–5

Pro osm navzájem různých bodů jako na obrázku platí, že body C, D, E leží na přímce rovnoběžné s přímkou AB, F je středem úsečky AD, G je středem úsečky AC a H je průsečíkem přímek AC a BE. Obsah trojúhelníku BCG je $12\,\mathrm{cm}^2$ a obsah čtyřúhelníku $DFHG$ je $8\,\mathrm{cm}^2$.

Určete obsahy trojúhelníků AFE, AHF, ABG a BGH. (*E. Semerádová*)



Nápověda. Umíte porovnat obsahy některých útvarů přímo, tj. bez konkrétních hodnot?

Možné řešení. Trojúhelníky ABC, ABD a ABE mají společnou stranu AB a stejnou výšku na tuto stranu, tedy mají stejný obsah. Body F a G jsou středy úseček AD a AC, tedy přímka FG je rovnoběžná s AB. Trojúhelníky ABF a ABG mají společnou stranu AB a stejnou výšku na tuto stranu, která je poloviční vzhledem k výšce předchozích tří trojúhelníků. Tedy trojúhelníky ABF a ABG mají stejný obsah, který je poloviční ve srovnání s obsahy trojúhelníků ABC, ABD a ABE. Celkem odtud dostáváme, že trojúhelníky AFE, ABF, BDF, ADG, ABG a BCG mají stejný obsah, a to $12\,\mathrm{cm}^2$.

Trojúhelník ADG je složen z trojúhelníku AHF a čtyřúhelníku $DFHG$, který má obsah $8\,\mathrm{cm}^2$. Obsah trojúhelníku AHF je tedy roven $12 - 8 = 4\,(\mathrm{cm}^2)$. Obdobně, obsah trojúhelníku BGH je tentýž.

Obsahy trojúhelníků AFE, AHF, ABG a BGH jsou po řadě 12, 4, 12 a $4\,(\mathrm{cm}^2)$.

Poznámka. Mezi zadanými objekty jsou vztahy, které jsme nepoužili, ale které dovolují alternativní postupy při řešení úlohy. Např. lze přímo ukázat, že čtyřúhelníky $ABCD$

a $ABDE$ jsou rovnoběžníky, že trojúhelníky AHF a BGH mají stejný obsah, že jejich součet je roven obsahu čtyřúhelníku $DFHG$ apod.

Pro zvídavé: v úloze neurčený obsah trojúhelníku ABH je roven $8\,\mathrm{cm}^2$.

Z8–I–6

V Kocourkově používají mince pouze se dvěma hodnotami, které jsou vyjádřeny v kocourkovských korunách kladnými celými čísly. Pomocí dostatečného množství takových mincí je možné zaplatit jakoukoli celočíselnou částku větší než 53 kocourkovských korun, a to přesně a bez vracení. Částku 53 kocourkovských korun však bez vracení zaplatit nelze.

Zjistěte, které hodnoty mohly být na kocourkovských mincích. Určete alespoň dvě řešení. (*A. Bohiniková*)

Nápověda. Mohou být jedny z kocourkovských mincí jednokoruny, nebo dvoukoruny, ... ?

Možné řešení. Budeme postupně uvažovat hodnotu jedněch kocourkovských mincí a uvažovat o hodnotě druhých, aby byly splněny požadavky ze zadání.

1) Pokud by jedny z mincí měly hodnotu 1, potom by šlo zaplatit jakoukoli částku.

2) Předpokládejme, že jedny z mincí mají hodnotu 2. Druhé mince nemohou mít sudou hodnotu, neboť s takovými mincemi by šly platit jen sudé částky.

Druhé mince nemohou mít lichou hodnotu menší než 55, neboť s takovými mincemi by šlo zaplatit částku 53 (např. $2 \cdot 2 + 49$, $2 + 51$). Kdyby druhé mince měly hodnotu 55, potom jakákoli sudá částka by šla zaplatit pomocí dostatečného množství 2 a jakákoli lichá částka větší než 53 by šla zaplatit pomocí 55 dostatečného množství 2:

$$\begin{array}{llll} 54 = 27 \cdot 2 & 56 = 28 \cdot 2 & 58 = 29 \cdot 2 & \dots \\ 55 = 1 \cdot 55 & 57 = 2 + 1 \cdot 55 & 59 = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 55 & \dots \end{array}$$

3) Předpokládejme, že jedny z mincí mají hodnotu 3. Druhé mince nemohou mít hodnotu dělitelnou třemi, neboť s takovými mincemi by nešly zaplatit jiné částky než ty dělitelné třemi.

Druhé mince nemohou mít hodnotu 5, 8, 11, ..., 53, neboť s takovými mincemi by šlo zaplatit částku 53 (např. $16 \cdot 3 + 5$, $15 \cdot 3 + 8$, ..., $3 + 50$). V této skupině jsme uvažovali hodnoty, které po dělení 3 dávají zbytek 2. Další hodnoty se stejnými zbytky jsou 56, 59 atd. Ani tyto možnosti nevyhovují, neboť s takovými mincemi by nešla zaplatit např. částka 55 (která je menší a po dělení 3 dává zbytek 1).

Druhé mince nemohou mít hodnotu 4, 7, 10, ..., 25, neboť s takovými mincemi by také šlo zaplatit částku 53 (např. $15 \cdot 3 + 2 \cdot 4$, $13 \cdot 3 + 2 \cdot 7$, ..., $3 + 2 \cdot 25$). V této skupině jsme uvažovali hodnoty, které po dělení 3 dávají zbytek 1. Kdyby druhé mince měly hodnotu 28, potom jakékoli částky větší než 53 by se daly platit např. takto:

$$\begin{array}{llll} 54 = 18 \cdot 3 & 57 = 19 \cdot 3 & 60 = 20 \cdot 3 & \dots \\ 55 = 9 \cdot 3 + 1 \cdot 28 & 58 = 10 \cdot 3 + 1 \cdot 28 & 61 = 11 \cdot 3 + 1 \cdot 28 & \dots \\ 56 = 2 \cdot 28 & 59 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 28 & 62 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 28 & \dots \end{array}$$

Zatím máme dvě řešení: na kocourkovských mincích mohly být hodnoty 2, 55 nebo 3, 28. Obdobným (avšak o něco namáhavějším) způsobem lze ještě odhalit možné hodnoty 4, 19 a 7, 10.

Poznámka. Problém, který řešíme v této úloze, je znám jako tzv. Frobeniův problém: vyhovující dvojice hodnot mincí a, b musí splňovat $ab - a - b = 53$ neboli

$$(a-1)(b-1) = 54.$$

S tímto (netriviálním) poznatkem umíme nepřímo ověřit, že uvedené čtyři případy jsou jediné možné.