I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Ondra, Matěj a Kuba se vracejí ze sbírání ořechů, celkem jich mají 120. Matěj si stěžuje, že Ondra má jako vždy nejvíc. Otec přikáže Ondrovi, aby přisypal ze svého Matějovi tak, aby mu počet ořechů zdvojnásobil. Nyní si stěžuje Kuba, že nejvíc má Matěj. Na otcův příkaz přisype Matěj Kubovi tak, že mu počet ořechů zdvojnásobí. Na to se zlobí Ondra, že nejméně ze všech má teď on. Kuba tedy přisype Ondrovi tak, že mu počet ořechů zdvojnásobí. Teď mají všichni stejně a konečně je klid.

Kolik ořechů měl původně každý z chlapců? (*M. Volfová*)

Nápověda. Jaké bylo rozdělení ořechů před tím, než měli všichni stejně?

Možné řešení. Nakonec měli všichni stejně, tj. po 40 ořeších (120 : 3). Předtím přisypával Kuba Ondrovi, a to tak, že mu počet ořechů zdvojnásobil. Před touto výměnou měl Ondra polovinu konečného stavu, takže se přesouvalo 20 ořechů: Ondra měl 20 a Kuba 60 ořechů (Matěj beze změny).

Obdobnými úvahami postupně odzadu určíme všechny výměny ořechů, a tak zjistíme původní počty ořechů:

	Ondra	Matěj	Kuba
původně	55	35	30
Ondra Matějovi	20	70	30
Matěj Kubovi	20	40	60
Kuba Ondrovi	40	40	40

Původně měl Ondra 55, Matěj 35 a Kuba 30 ořechů.

Jiné řešení. Pokud původní počty ořechů označíme x, y a z, potom průběh celé transakce vypadal takto:

	Ondra	Matěj	Kuba
původně	x	y	z
Ondra Matějovi	$x-y$	$2y$	z
Matěj Kubovi	$x-y$	$2y-z$	$2z$
Kuba Ondrovi	$2(x-y)$	$2y-z$	$2z-(x-y)$

Podle zadání platí následující rovnosti:

$$2(x-y) = 2y - z = 2z - (x-y) = 40.$$

Rovnost $2(x-y)=40$ je ekvivalentní $x-y=20$.

Dosazením do rovnosti $2z-(x-y)=40$ dostáváme $2z=60$, tedy $z=30$.

Dosazením do rovnosti $2y-z=40$ dostáváme $2y=70$, tedy $y=35$.

Nakonec z rovnosti $x-y=20$ dostáváme $x=55$.

Původně měl Ondra 55, Matěj 35 a Kuba 30 ořechů.

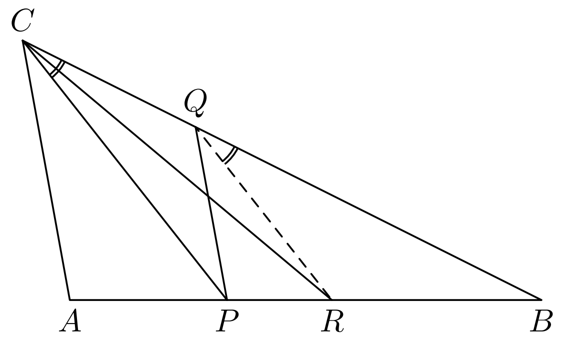
Z9–I–2

V trojúhelníku ABC leží bod P ve třetině úsečky AB blíže bodu A, bod R je ve třetině úsečky PB blíže bodu P a bod Q leží na úsečce BC tak, že úhly PCB a RQB jsou shodné.

Určete poměr obsahů trojúhelníků ABC a PQC. (*L. Růžičková*)

Nápověda. V popsané změti bodů lze najít více trojúhelníků, jejichž obsahy lze porovnávat.

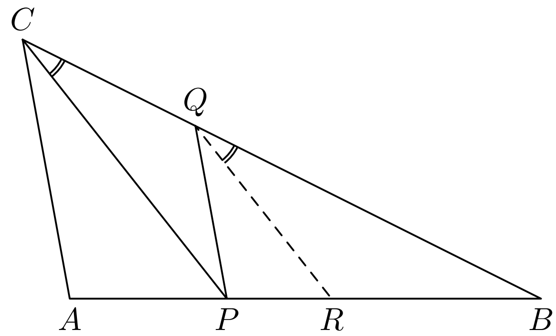
Možné řešení. Body C, Q a B leží na jedné přímce a úhly PCB a RQB jsou shodné. Tedy přímky PC a RQ jsou rovnoběžné, trojúhelníky PCQ a PCR mají stejnou výšku na stranu PC, a tak i stejný obsah. Poměr obsahů trojúhelníků ABC a PCQ je proto stejný jako poměr obsahů trojúhelníků ABC a PCR.



Trojúhelníky ABC a PRC mají stejnou výšku ze společného vrcholu C, tedy poměr jejich obsahů je stejný jako poměr délek stran AB a PR. Poměr délek úseček AB a PB je $3:2$, poměr délek úseček PB a PR je $3:1$, tedy poměr délek úseček AB a PR je $(3:2)\cdot(3:1)=9:2$.

Poměr obsahů trojúhelníků ABC a PQC je $9:2$.

Jiné řešení. Stejně jako v předchozím řešení si všimneme, že přímky PC a RQ jsou rovnoběžné. Odtud vyplývá, že bod Q na úsečce CB je ve stejném poměru jako bod R na úsečce PB, tj. v jedné třetině blíže bodu C. Ve stejném poměru jsou proto i obsahy trojúhelníků PQC a PQB, neboť mají stejnou výšku z vrcholu P.



Bod Q na úsečce CB je však také ve stejném poměru jako bod P na úsečce AB, tedy trojúhelníky PQB a ACB jsou podobné a koeficient podobnosti je $2 : 3$. Jejich obsahy jsou tedy v poměru $4 : 9$.

Dohromady, poměr obsahů trojúhelníků ABC a PQB je $9 : 4$, poměr obsahů trojúhelníků PQB a PQC je $2 : 1$, tedy poměr obsahů trojúhelníků ABC a PQC je $(9 : 4) \cdot (2 : 1) = 9 : 2$.

Z9–I–3

Pro která celá čísla x je podíl $\frac{x+11}{x+7}$ celým číslem? Najděte všechna řešení.

(*L. Hozová*)

Nápověda. Umíte zadaný výraz nějak upravit?

Možné řešení. Zadaný výraz lze upravit následovně („celá část plus zbytek“):

$$\frac{x+11}{x+7} = \frac{(x+7)+4}{x+7} = \frac{x+7}{x+7} + \frac{4}{x+7} = 1 + \frac{4}{x+7}.$$

Tedy $\frac{x+11}{x+7}$ je celé číslo, právě když $\frac{4}{x+7}$ je celé číslo, tj. právě když $x+7$ je dělitelem čísla 4. Číslo 4 má šest dělitelů: -4, -2, -1, 1, 2 a 4. Odpovídající hodnoty x jsou o 7 menší. Číslo $\frac{x+11}{x+7}$ je celé pro x rovno -11, -9, -8, -6, -5 nebo -3.

Jiné řešení. Aby jmenovatel nebyl nulový, x nemůže být -7. Dosazováním celých čísel poblíž této hodnoty dostáváme:

x	-6	-8	-5	-9	-4	-10	-3	-11	...
$\frac{x+11}{x+7}$	5	-3	3	-1	$\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	0	...

Se zvětšující se vzdáleností x od -7 dostáváme na druhém řádku necelá čísla mezi 2 a 0, která se blíží k 1, ale nikdy jí nedosáhnou: kdyby $\frac{x+11}{x+7} = 1$, potom by $x + 11 = x + 7$, což není možné. Všechny vyhovující možnosti jsou tedy obsaženy v uvedené tabulce. Číslo $\frac{x+11}{x+7}$ je celé pro x rovno -11, -9, -8, -6, -5 nebo -3.

Poznámka. Předchozí argumentaci považujte za vyhovující, i když není dokonalá: ukázat korektně, že pro $x > -3$ nebo $x < -11$ jsou hodnoty $\frac{x+11}{x+7}$ mezi 2 a 0, asi překračuje možnosti řešitelů v této kategorii.

Tato diskuse souvisí s monotonním chováním funkce $x \mapsto \frac{x+11}{x+7}$. Zdánlivý zmatek v hodnotách funkce v okolí $x = -7$ souvisí s tím, že v tomto bodě není funkce definována a její hodnoty nejsou nijak omezeny. Zvídaví řešitelé se mohou zamyslet nad chováním této funkce, načrtnout její graf a porovnat s předchozími závěry.

Z9–I–4

Maty dopadl padákem na ostrov obývaný dvěma druhy domorodců: Poctivci, kteří vždy mluví pravdu, a Lháři, kteří vždy lžou. Před dopadem zahlédl v dálce přístav, ke kterému se hodlal dostat.

Na prvním rozcestí potkal Maty jednoho domorodce a opodál viděl druhého. Požádal prvního, aby se zeptal toho druhého, zda je Lhář, nebo Poctivec. První domorodec Matymu vyhověl, šel se zeptat a když se vrátil, oznámil Matymu, že druhý domorodec tvrdí, že je Lhář. Poté se Maty prvního domorodce zeptal, která cesta vede k přístavu. Ten mu jednu cestu ukázal a dál si Matyho nevšímal.

Má, nebo nemá Maty domorodci věřit? Vede, nebo nevede ona cesta k přístavu?

(*M. Volfová*)

Nápověda. Začněte u druhého domorodce.

Možné řešení. Ať Poctivec, či Lhář, nikdo o sobě nemůže říct, že je Lhář (Poctivec by lhal a Lhář by mluvil pravdu).

Když první domorodec oznamoval Matymu, že druhý domorodec je Lhář, jistě nemluvil pravdu. Je to tedy Lhář, Maty by mu věřit neměl a zmiňovaná cesta do přístavu nevede.

Poznámka. Pro přehlednost uvádíme možné výroky domorodců v jednotlivých případech:

první	druhý	druhý o sobě	první o druhém
Poctivec	Poctivec	„Poctivec“	„Poctivec“
Poctivec	Lhář	„Poctivec“	„Poctivec“
Lhář	Poctivec	„Poctivec“	„Lhář“
Lhář	Lhář	„Poctivec“	„Lhář“

Z9–I–5

Majka zkoumala vícemístná čísla, ve kterých se pravidelně střídají liché a sudé číslice. Ta, která začínají lichou číslicí, nazvala komická a ta, která začínají sudou číslicí, nazvala veselá. (Např. číslo 32387 je komické, číslo 4529 je veselé.)

Majka vytvořila jedno trojmístné komické a jedno trojmístné veselé číslo, přičemž šest použitých číslic bylo navzájem různých a nebyla mezi nimi 0. Součet těchto dvou čísel byl 1617. Součin těchto dvou čísel končil dvojčíslím 40.

Určete Majčina čísla a dopočítejte jejich součin. (*M. Dillingerová*)

Nápověda. Kolikamístné mohou být součiny trojmístných čísel a jak byste je ručně počítali?

Možné řešení. Součin dvou trojmístných čísel je alespoň pětimístný a nanejvýš šestimístný. Pro další uvažování si Majčina čísla označíme a naznačíme výpočet součinu:

$$\begin{array}{r} a\ B\ c \\ +\,D\ e\ F \\ \hline 1\ 6\ 1\ 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a\ B\ c \\ \cdot\ D\ e\ F \\ \hline *\ *\ *\ 0 \\ *\ *\ *\ *\ \\ *\ *\ *\ *\ \ \\ \hline *\ *\ *\ *\ 4\ 0 \end{array}$$

Různá písmena představují různé číslice, velká odpovídají sudým a malá lichým.

Aby součin končil 0, musí být $c = 5$ (mezi použitými číslicemi není 0). Aby součet končil 7, musí být $F = 2$.

Aby v součtu na místě desítek byla 1, musí být $B + e = 11$. Sudé B různé od 2 (a od 0) a liché e různé od 5, které splňují tuto podmínku, jsou buď $B = 4$, $e = 7$, nebo $B = 8$, $e = 3$. Rozebereme obě možnosti:

- Předpokládejme, že $B = 4$ a $e = 7$.

$$\begin{array}{r} a\ 4\ 5 \\ +\,D\ 7\ 2 \\ \hline 1\ 6\ 1\ 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a\ 4\ 5 \\ \cdot\ D\ 7\ 2 \\ \hline *\ *\ 9\ 0 \\ *\ *\ 1\ 5\ \\ *\ *\ *\ *\ \ \\ \hline *\ *\ *\ *\ 4\ 0 \end{array}$$

  V součinu vychází poslední dvojčíslí 40 v souladu se zadáním. Aby součet začínal dvojčíslím 16, musí být $a + D = 15$ (z předchozího přechod přes desítku). Liché a různé od 5 a 7 a sudé D různé od 2 a 4 (a 0), které splňují tuto podmínku, jsou jedině $a = 9$ a $D = 6$. V takovém případě součin vychází 635040.
- Předpokládejme, že $B = 8$ a $e = 3$.

$$\begin{array}{r} a\ 8\ 5 \\ +\,D\ 3\ 2 \\ \hline 1\ 6\ 1\ 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a\ 8\ 5 \\ \cdot\ D\ 3\ 2 \\ \hline *\ *\ 7\ 0 \\ *\ *\ 5\ 5\ \\ *\ *\ *\ *\ \ \\ \hline *\ *\ *\ *\ 4\ 0 \end{array}$$

  V tomto případě by v součinu vycházelo poslední dvojčíslí 20 a nikoli 40. Tato možnost tedy vede ke sporu s požadavky ze zadání.

Celkem vychází jediná možnost: Majčina čísla jsou 945 a 672, jejich součin je 635040.

Poznámka. Pokud bychom po úvodním odvození $c = 5$ a $F = 2$ pracovali se součinem zapsaným opačně, potom si nelze nevšimnout, že bez ohledu na hodnotu e vychází:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & D & e & 2 \\
 & & \cdot & a & B & 5 \\
\hline
 & & * & * & 6 & 0 \\
 & * & * & * & x & \\
* & * & * & * & & \\
\hline
* & * & * & * & 4 & 0
\end{array}
$$

(Číslice 6 na prvním řádku v mezivýsledku plyne z lichosti e a přechodu přes desítku.) Aby poslední dvojčíslí součinu vycházelo 40, musí být $x = 8$, a tedy $B = 4$. Tato úvaha redukuje předchozí zkoušení.

Z9–I–6

Kristýna zvolila jisté liché přirozené číslo dělitelné třemi. Jakub s Davidem pak zkoumali trojúhelníky, které mají obvod v milimetrech roven Kristýnou zvolenému číslu a jejichž strany mají délky v milimetrech vyjádřeny navzájem různými celými čísly.

Jakub našel takový trojúhelník, v němž nejdelší ze stran má největší možnou délku, a tuto hodnotu zapsal na tabuli. David našel takový trojúhelník, v němž nejkratší ze stran má největší možnou délku, a tuto hodnotu také zapsal na tabuli. Kristýna obě délky na tabuli správně sečetla a vyšlo jí 1 681 mm.

Určete, které číslo Kristýna zvolila. (*L. Růžičková*)

Nápověda. Umíte vzhledem k popsané vlastnosti Kristýnina čísla vyjádřit Jakubovo a Davidovo číslo?

Možné řešení. Kristýnino číslo, které označíme k, je liché a dělitelné třemi. To znamená, že k je lichým násobkem tří, tedy

$$k = 3(2n + 1) = 6n + 3$$

pro nějaké přirozené číslo n. Velikosti stran (v mm) Jakubova a Davidova trojúhelníku odpovídají trojicím přirozených čísel, které v součtu dávají k a pro něž platí trojúhelníkové nerovnosti (součet každých dvou čísel je větší než třetí).

Největší možná délka nejdelší strany v trojúhelníku s obvodem k odpovídá největšímu přirozenému číslu, které je menší než polovina k (kvůli trojúhelníkové nerovnosti). Jakubovo číslo tedy bylo $3n + 1$. Zbylé dvě strany mohly odpovídat např. $3n$ a 2, ale to nás pro dořešení úlohy nezajímá.

Největší možná délka nejkratší strany v trojúhelníku s obvodem k odpovídá největšímu přirozenému číslu, které je menší než třetina k (příslušný trojúhelník má být co nejvíc rovnostranný, avšak strany mají být navzájem různé). Davidovo číslo tedy bylo $2n$; zbylé dvě strany odpovídaly $2n + 1$ a $2n + 2$.

Součet Jakubova a Davidova čísla je $5n + 1$, což má podle zadání odpovídat 1681. Odtud $5n = 1680$, a tedy $n = 336$. Kristýnino číslo bylo

$$k = 6 \cdot 336 + 3 = 2019.$$