69. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

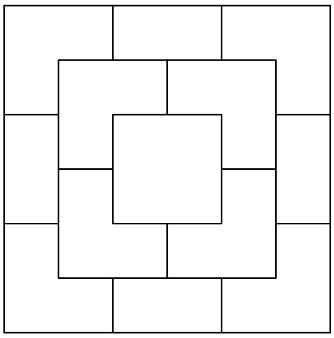
Pat a Mat měli každý své oblíbené přirozené číslo, ale každý jiné. Obě čísla postupně sečetli, odečetli (menší od většího), vynásobili a vydělili (větší menším). Když takto získané výsledky sečetli, vyšlo jim 98.

Která oblíbená čísla měli Pat a Mat? (*L. Hozová*)

Z9–II–2

Obrázek představuje pohled shora na třívrstvou pyramidu tvořenou 14 shodnými kostkami. Každé kostce přísluší jedno přirozené číslo, a to tak, že čísla odpovídající kostkám ve spodní vrstvě jsou navzájem různá a číslo na každé další kostce je součtem čísel ze čtyř sousedících kostek z nižší vrstvy.

Určete nejmenší číslo dělitelné čtyřmi, které může příslušet nejvrchnější kostce. (*A. Bohiniková*)



Z9–II–3

Uvažme čtyřmístné přirozené číslo s následující vlastností: jestliže prohodíme jeho první dvojčíslí s druhým, dostaneme čtyřmístné číslo o 99 menší.

Kolik je takových čísel celkem a kolik z nich je dělitelných 9? (*K. Pazourek*)

Z9–II–4

Do obecného trojúhelníku ABC narýsujte bod D tak, aby obsah trojúhelníku ABD byl roven polovině obsahu trojúhelníku ABC a obsah trojúhelníku BCD byl roven šestině obsahu trojúhelníku ABC.

(Řešení má být obecně platné, tedy nezávislé na zvoleném trojúhelníku, jeho speciálních vlastnostech či rozměrech. Konstrukce nemůže být založena na měření a počítání. Zvolte si trojúhelník, který není rovnoramenný ani pravoúhlý.) (*L. Hozová*)

Okresní kolo kategorie Z9 se koná **29. ledna 2020** tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 12 a více bodů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní matematické tabulky. Kalkulátory povoleny nejsou. Mobilní telefony musí být vypnuty.

69. ročník Matematické olympiády

II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

Pat a Mat měli každý své oblíbené přirozené číslo, ale každý jiné. Obě čísla postupně sečetli, odečetli (menší od většího), vynásobili a vydělili (větší menším). Když takto získané výsledky sečetli, vyšlo jim 98.

Která oblíbená čísla měli Pat a Mat? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Pokud větší z obou čísel označíme x a menší y, potom podmínka ze zadání zní

$$(x+y)+(x-y)+xy+\frac{x}{y}=98.$$

Protože součet, rozdíl i součin čísel x a y jsou přirozená čísla a výsledkem je také přirozené číslo, musí být x násobkem y, tj. $x=ky$ pro nějaké přirozené číslo k. Dosadíme do předchozí rovnosti, kterou dále upravíme:

$$\begin{aligned}2ky+ky^2+k&=98,\\ k(y^2+2y+1)&=98,\\ k\cdot(y+1)^2&=2\cdot 7^2.\end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že $k=2$ a $y=6$, tedy $x=12$. (Případný rozklad $98\cdot 1^2$ jsme vyloučili, neboť y je přirozené číslo, tedy $y+1>1$.) Patova a Matova oblíbená čísla byla 6 a 12.

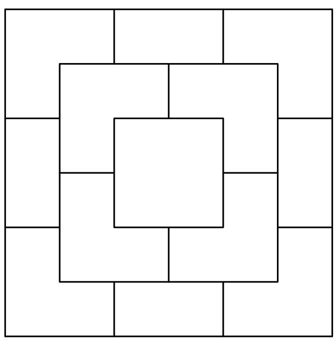
Hodnocení. 1 bod za sestavení úvodní rovnice; 3 body za zdůvodnění $x=ky$, dosazení do rovnice a následné úpravy; 2 body za výsledek.

Poznámka. Závěrečná úprava (doplnění levé strany na čtverec a rozklad pravé strany na prvočinitele) podstatně usnadňuje argumentaci. Řešení bez tohoto nápadu vyžadují zkoušení možností odvozená od dělitelů, resp. rozkladů čísla 98. Takové postupy hodnoťte podle kvality doprovodného komentáře.

Z9–II–2

Obrázek představuje pohled shora na třívrstvou pyramidu tvořenou 14 shodnými kostkami. Každé kostce přísluší jedno přirozené číslo, a to tak, že čísla odpovídající kostkám ve spodní vrstvě jsou navzájem různá a číslo na každé další kostce je součtem čísel ze čtyř sousedících kostek z nižší vrstvy.

Určete nejmenší číslo dělitelné čtyřmi, které může příslušet nejvrchnější kostce. (*A. Bohiniková*)



Možné řešení. Číslo příslušející nejvrchnější kostce je určeno čtyřmi čísly ze druhé vrstvy, a ta jsou zcela určena čísly ve vrstvě první. Přitom každá rohová kostka první vrstvy sousedí s jednou kostkou z druhé vrstvy, každá nerohová kostka na hraně první vrstvy sousedí se dvěma kostkami z druhé vrstvy a středová kostka první vrstvy sousedí se všemi čtyřmi kostkami druhé vrstvy. Tedy do celkového součtu v nejvrchnější kostce přispívají čtyři kostky jedenkrát, čtyři dvakrát a jedna čtyřikrát.

Pro navzájem různá čísla v první vrstvě je nejmenší možné číslo v nejvrchnější kostce rovno

$$1 \cdot (9+8+7+6) + 2 \cdot (5+4+3+2) + 4 \cdot 1 = 62.$$

Nejbližší větší číslo dělitelné čtyřmi je 64, což je nejmenší číslo příslušející nejvrchnější kostce, které vyhovuje všem požadavkům. Tohoto výsledku lze dosáhnout např. tak, že místo čísla 9 v předchozím součtu vezmeme číslo 11.

Hodnocení. 2 body za určení nejmenšího možného čísla; 2 body za určení nejmenšího čísla dělitelného čtyřmi a konkrétní vyhovující realizace; 2 body podle kvality komentáře.

Poznámka. Označme čísla v první vrstvě následovně:

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

Potom čísla ve druhé vrstvě jsou:

$$\begin{matrix} a+b+d+e & b+c+e+f \\ d+e+g+h & e+f+h+i \end{matrix}$$

A číslo v nejvrchnější kostce je:

$$a+c+g+i+2(b+d+f+h)+4e$$

Z9–II–3

Uvažme čtyřmístné přirozené číslo s následující vlastností: jestliže prohodíme jeho první dvojčíslí s druhým, dostaneme čtyřmístné číslo o 99 menší.

Kolik je takových čísel celkem a kolik z nich je dělitelných 9? (*K. Pazourek*)

Možné řešení. Označme původní čtyřmístné číslo $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$. Podle zadání platí $\overline{abcd} = \overline{cdab} + 99$, přičemž b a d jsou celá čísla od 0 do 9, a a c jsou celá čísla od 1 do 9 a navíc $a \geqq c$. Rozepsáním a úpravou předchozí rovnosti dostáváme:

$$\begin{aligned} 1000a + 100b + 10c + d &= 1000c + 100d + 10a + b + 99, \\ 990a - 990c &= 99d - 99b + 99, \\ 10(a-c) &= d - b + 1. \end{aligned}$$

Z předchozích omezení vyplývá, že číslo $d - b + 1$ na pravé straně může nabývat hodnot od -8 do 10. Z rovnosti navíc vyplývá, že toto číslo má být násobkem 10, tedy buď 10, nebo 0. Obě možnosti probereme zvlášť:

a) $10(a-c) = d - b + 1 = 10$, tzn. $a = c + 1$, $d = 9$ a $b = 0$. Čísel tohoto tvaru je celkem osm (pro c od 1 do 8):

$$2019,\ 3029,\ 4039,\ 5049,\ 6059,\ 7069,\ 8079,\ 9089.$$

Mezi nimi je pouze číslo 5049 dělitelné devíti (ciferný součet $2c+1+9$ je dělitelný devíti pro $c = 4$).

b) $10(a-c) = d-b+1 = 0$, tzn. $a = c$ a $b = d+1$. V tomto případě můžeme dosazovat c od 1 do 9 a d od 0 do 8, tj. celkem $9 \cdot 9 = 81$ možností:

$$\begin{matrix} 1110, & \dots, & 1918, \\ \vdots & & \vdots \\ 9190, & \dots, & 9998. \end{matrix}$$

Ciferný součet čísel tohoto tvaru je $2(c+d)+1$, a ten je v rámci našich omezení dělitelný devíti buď pro $c+d = 4$, nebo pro $c+d = 13$. V prvním případě dostáváme čtyři čísla:

$$1413,\ 2322,\ 3231,\ 4140.$$

Ve druhém případě dostáváme pět čísel:

$$5958,\ 6867,\ 7776,\ 8685,\ 9594.$$

Všech čísel vyhovujících první části zadání je $8 + 81 = 89$. Mezi těmito čísly je $1 + 4 + 5 = 10$ dělitelných devíti.

Hodnocení. 2 body za přípravné úpravy a postřehy; 2 body za výsledek; 2 body za úplnost a kvalitu komentáře.

Poznámka. Zadání úlohy je možné nahlížet jako algebrogram

$$\begin{array}{rcccc} & c & d & a & b \\ + & & & 9 & 9 \\ \hline & a & b & c & d \end{array}$$

Některé z předchozích úvah mohou být v tomto provedení názornější.

Z9–II–4

Do obecného trojúhelníku ABC narýsujte bod D tak, aby obsah trojúhelníku ABD byl roven polovině obsahu trojúhelníku ABC a obsah trojúhelníku BCD byl roven šestině obsahu trojúhelníku ABC.

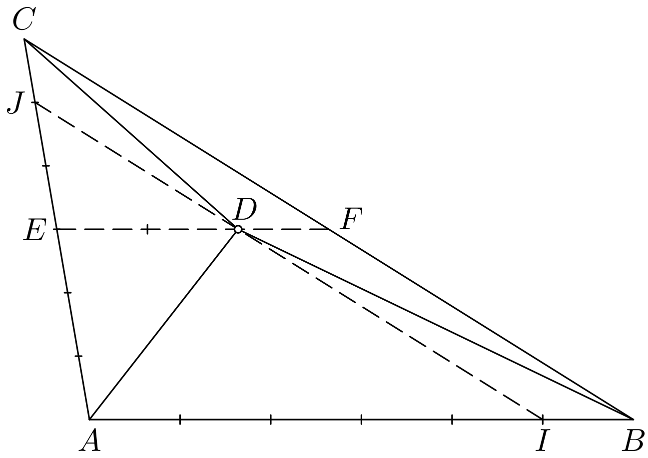
(Řešení má být obecně platné, tedy nezávislé na zvoleném trojúhelníku, jeho speciálních vlastnostech či rozměrech. Konstrukce nemůže být založena na měření a počítání. Zvolte si trojúhelník, který není rovnoramenný ani pravoúhlý.) (*L. Hozová*)

Možné řešení. Rozbor:

Trojúhelníky ABC a ABD mají společnou stranu AB, tedy obsahy těchto trojúhelníků jsou ve stejném poměru jako velikosti jejich výšek na stranu AB. Výška druhého trojúhelníku proto musí být poloviční vzhledem k výšce prvního. To znamená, že vrchol D leží na střední příčce trojúhelníku ABC rovnoběžné se stranou AB. Tato přímka je určena body E a F, což jsou po řadě středy stran AC a BC.

Trojúhelníky ABC a BCD mají společnou stranu BC, tedy obsahy těchto trojúhelníků jsou ve stejném poměru jako velikosti jejich výšek na stranu BC. Výška druhého trojúhelníku proto musí být šestinová vzhledem k výšce prvního. To znamená, že vrchol D leží na přímce, která je rovnoběžná se stranou BC a jejíž vzdálenost od BC je šestinová vzhledem k vzdálenosti vrcholu A od BC. Tato přímka je určena body I a J, které leží po řadě v šestinách úseček BA a CA, viz obrázek.

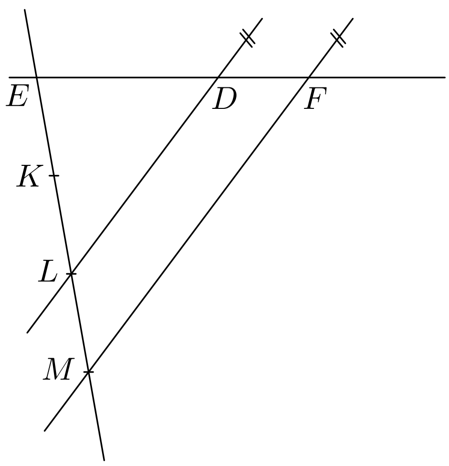
Protože střední příčka EF je shodná s polovinou strany AB, leží bod D ve třetině úsečky FE, blíže bodu F.



Konstrukce:

- Bod E jakožto střed úsečky AC.
- Bod F jakožto střed úsečky BC.
- Bod D ve třetině úsečky FE, blíže bodu F.

Střed úsečky je možné sestrojit pomocí průsečíků shodných kružnic se středy v koncových bodech nebo pomocí podobných trojúhelníků. Třetinu úsečky je možné sestrojit pomocí podobných trojúhelníků:



- Body K, L, M na libovolné přímce procházející E se stejnými vzdálenostmi $|EK| = |KL| = |LM|$.

- Bod D jakožto průsečík přímky EF a rovnoběžky s přímkou FM jdoucí bodem L.

Hodnocení. 3 body za rozbor úlohy s jednoznačným vymezením bodu D; 3 body za konstrukci bodu D (z toho 1 bod za korektní konstrukci třetiny, resp. šestiny úsečky).

Poznámky. Řešení lze založit na správném rozdělení výšek a rovnoběžkách s příslušnými stranami. Pomocné body E, F, I a J na stranách trojúhelníku nejsou k sestrojení bodu D nezbytné.

Obsahy trojúhelníků ABD a BCD jsou po řadě rovny polovině a šestině obsahu trojúhelníku ABC. Obsah doplňkového trojúhelníku ACD je proto roven třetině trojúhelníku ABC $(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3})$. Obsahy trojúhelníků BCD a ACD jsou tedy v poměru $1 : 2$ a ve stejném poměru musí být i velikosti úseček DF a DE. Takto lze alternativně zdůvodnit, že bod D leží ve třetině úsečky FE.

Bod F je středem úsečky BC, tedy přímka EF je těžnicí trojúhelníku BCE. Bod D je ve třetině úsečky FE blíže bodu F, tedy D je těžištěm trojúhelníku BCE. To znamená, že přímka BD je jeho těžnicí, a tedy protíná úsečku CE v jejím středu. Bod D lze alternativně sestrojit (bez třetění, resp. šestění úseček) jakožto průsečík přímek EF a BG, kde G je středem úsečky CE: